PRÉ-CÁLCULO

UMA PONTE ENTRE A MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO E O CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Edmundo Capelas de Oliveira
Jayme Morandi Vaz

ISBN 978-85-906405-0-9

9 788590 640509

PRÉ-CÁLCULO

UMA PONTE ENTRE A MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO E O CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Edmundo Capelas de Oliveira
Jayme Morandi Vaz

Editoração eletrônica em LaTeX pelos autores.
Versão 1.0 de 04 de outubro de 2018.

ISBN: 978-85-906405-0-9

Clique nos links abaixo para
acessar o CV Lattes dos autores.

Edmundo Capelas de Oliveira
http://lattes.cnpq.br/1122232718000395

Jayme Morandi Vaz
http://lattes.cnpq.br/4218328980987254

Sumário

Prefácio

Prefaciar um livro didático requer, no mínimo, a elaboração de um texto não muito longo, focado e motivador, a fim de atingir o seu público alvo, aquele que vai fazer uso do texto, independentemente se venha a adquirir o livro ou apenas utilizá-lo como consulta. É fundamental também, no caso da presente obra, que seja justificado o motivo de o livro ser disponibilizado *online* e gratuito, visto que os autores têm títulos publicados da forma, digamos, convencional.

Essa maneira convencional exige idealizar, escrever, publicar e divulgar o que, em linhas gerais, requer um longo percurso, pois a distância entre os extremos é muito grande. De um lado o autor, aquele que vislumbra e escreve o texto, e do outro a editora, aquela que realiza o projeto, a fim de colocá-lo no mercado. Uma vez no mercado, o que se espera é que o livro seja vendido e isso pode, eventualmente, deixar à margem uma parte do público alvo, em particular, pelo preço (muitas vezes exageradamente oneroso) a ser desembolsado para sua aquisição.

Por entendermos que a matemática pode ser pensada como uma sequência lógica, composta por tijolos sobrepostos no sentido de que, por exemplo, um determinado conceito é pré-requisito para um outro, supostamente, mais abstrato, e que requer esforço por parte do estudante, no que concerne a resolução de exercícios a fim de solidificar a parte teórica, escrevemos esse texto que tem a intenção de ser, única e exclusivamente, apenas um texto complementar ao livro texto.

Nós, como professores universitários, ao ministrar a disciplina *Cálculo* para ingressantes nos cursos das áreas de exatas ou tecnológicas, dentre outras, nos deparamos com um público heterogêneo, pois encontramos estudantes advindos das mais diversas regiões do país bem como de distintas escolas públicas e privadas e, eventualmente, estudantes que ingressaram apenas com a pontuação mínima no Exame Nacional do Ensino Médio.

Pensando assim, elaboramos o presente texto, que não tem a pretensão de substituir o conteúdo coberto nos ensinos, fundamental II e médio, tampouco ser um compêndio no assunto. Tem, sim, a pretensão de ser um texto complementar e que contribua para o melhor desenvolvimento da disciplina *Cálculo*. Em particular, tornar mais suave (menos traumatizante) a transição do ensino médio para o primeiro ano do curso onde a disciplina *Cálculo* se faz presente. Para isso, focamos na resolução de problemas, em vez do desenvolvimento formal da teoria.

Por que disponibilizar gratuitamente *online*? Foi a maneira que vislumbramos de atingir estudantes do ensino médio de todas as classes sociais, pois não atuamos diretamente nesse segmento de ensino. Foi também a maneira que entendemos ser mais eficaz de dar nossa contribuição para o ensino junto a esse público.

Apresentamos, então, o conteúdo a ser desenvolvido, em particular, objetivando a ementa da disciplina *Cálculo*, que é a nossa preocupação básica. Começamos com as progressões tendo em mente que vamos convergir para as funções, tijolo fundamental, visando limites. Após as progressões, apresentamos os logaritmos e a exponencial, visando também limites, em particular um dos conhecidos limites fundamentais onde o número e desempenha papel crucial. Outro item que nos leva aos limites é a trigonometria que, além de desempenhar papel fundamental em processos periódicos, nos conduzirá a um outro limite fundamental. Enfim, os polinômios e as equações algébricas que vão preceder o conceito de função para, imediatamente após esse conceito, introduzirmos, ainda que de forma ingênua, porém natural, o conceito de limite – aqui, nos parece que está feita a transição entre o ensino médio e a disciplina *Cálculo* – para, como um particular limite, estudar o conceito de derivada e finalizarmos com o conceito de integral.

No primeiro Capítulo, após o conceito de sucessão, particularizamos para apresentar as progressões aritmética e geométrica, junto com propriedades e já mencionando o termo limite, bem como possíveis aplicações. No segundo Capítulo, após o conceito de logaritmo e suas propriedades, apresentamos as exponenciais e suas diversas aplicações, visando uma possível conexão com a trigonometria, assunto a ser abordado no terceiro Capítulo. No quarto Capítulo, estudamos de forma introdutória o essencial dos números complexos, enquanto no quinto Capítulo, discutimos os polinômios e as equações algébricas visando o conceito de função que merecerá todo o sexto Capítulo, com destaque para a conexão com os capítulos anteriores e visando os próximos três capítulos, em particular o esboço de um gráfico, após os conceitos de limite que será abordado no sétimo Capítulo e de derivada apresentada no oitavo Capítulo. No nono Capítulo, discutimos o conceito de integral visando o cálculo de uma área e o comprimento de uma curva enquanto o décimo Capítulo contém uma série de exercícios mais elaborados, relativos aos capítulos anteriores, todos contendo uma sugestão visando a resolução.

Caro leitor, caso tenha encontrado algum erro no texto, por favor, somos muito gratos se formos notificados a esse respeito.

Enfim, (ECO) externa sinceros agradecimentos a Ivana, por enconrajar um infindável trabalho e (JMV) agradece Maria Clara e Liliane pela constante ternura em sua vida.

Os autores.

Capítulo 1

Sucessões

Como motivação para este capítulo e visando o próximo, onde vamos abordar os conceitos de logaritmo e exponencial, propomos mostrar que vale a desigualdade $2 < e < 3$ sendo e a base dos logaritmos neperianos.

1.1 Sequência

A fim de atingir nosso objetivo, começamos por introduzir o conceito de sucessão ou sequência, no caso geral, pois no Ensino Médio (EM) foram estudados, pelo menos, dois tipos de sequências, as progressões aritméticas, associadas a somas e subtrações, e geométricas, associadas a multiplicações e divisões, temas a serem abordados nesse capítulo, como casos particulares.

DEFINIÇÃO 1.1.1. *Sequência*

Seja $n = 1,2,3,\ldots$ Define-se sequência (ou sucessão), com notação (a_n), a toda correspondência dos números naturais ($\mathbb{N}$) no conjunto dos reais ($\mathbb{R}$).

EXEMPLO 1.1. *Raiz quadrada*

Seja $n \geq 1$. A associação de cada número natural com a sua raiz quadrada fornece a sequência, cujos termos são $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n}$. Aqui, $\sqrt{n}$ é o chamado termo geral da sequência.

Em geral, os termos de uma sequência são dados por $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, sendo a_n o seu termo geral, pois a partir dele, percorrendo os naturais, podemos obter qualquer um de seus termos, com a substituição pelo respectivo valor de n.

DEFINIÇÃO 1.1.2. *Monotonia*

Seja $n \geq 1$. Uma sequência (a_n) de números reais é chamada monótona crescente se $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots$, enquanto, se $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots$ é chamada monótona decrescente.

Ainda mais, se não tivermos contemplados os sinais de igualdade, inserimos a palavra estritamente, isto é, se $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots$, chamada estritamente crescente ou, enquanto, se $a_1 > a_2 > \cdots > a_n > \cdots$, chamada estritamente decrescente, facultando-se o nome monótona. Se não valer nenhuma das quatro possibilidades dizemos não monótonas.

É conveniente lembrar que o estudo que se segue, em particular, levando ao conceito de limite, dentre outros, diz respeito a trabalhar com valores de n muito grandes, isto é, o conceito de limite de uma sequência está associado aos termos com índices suficientemente grandes. Diante disso, denotamos: n cresce indefinidamente ou n se aproxima do infinito ou n tende ao infinito.

PROPRIEDADE 1.1.1. *Propriedade* P

Consideremos uma sequência (a_n) com $n = 1, 2, 3, \ldots$ Dizemos que uma propriedade P é válida para todo n suficientemente grande, isto é, podemos achar um número n_0 tal que todo termo a_n, com $n \geq n_0$ satisfaz a propriedade.

A partir de agora, vamos considerar duas sequências que, na medida do possível, serão aquelas que vamos exemplificar, seja numa definição, ou numa proposição ou mesmo num teorema. Seja $n = 1, 2, 3, \ldots$ e as sequências com termo geral dado por

$$\text{i)} \qquad a_n = \frac{1}{n^2} \qquad \text{e} \qquad \text{ii)} \qquad a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{1.1}$$

EXEMPLO 1.2. *Propriedade* P.1

Sejam a sequência Eq.(1.1.i) e a propriedade P: $0 < a_n < 5/181$. Mostre que a propriedade P.1 é satisfeita para todo índice $n \geq n_0$.

Do termo geral da sequência, temos

$$a_6 = \frac{1}{36} > \frac{5}{181} \qquad \text{e} \qquad a_7 = \frac{1}{49} < \frac{5}{181}.$$

Visto que a sequência é estritamente decrescente, segue que a Propriedade P.1 é satisfeita para todo índice $n \geq n_0 = 7$.

EXEMPLO 1.3. *Propriedade* P.2

Sejam a sequência Eq.(1.1.ii) e a propriedade P: $a_n > 65/27$. Mostre que a propriedade P.2 é satisfeita para todo índice $n \geq n_0$.

Do termo geral da sequência, temos

$$a_3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 < \frac{65}{27} \qquad \text{e} \qquad a_4 = \left(\frac{5}{4}\right)^4 > \frac{65}{27}.$$

Visto que a sequência é estritamente crescente, segue que a Propriedade P.2 é satisfeita para todo índice $n \geq n_0 = 4$.

EXEMPLO 1.4. *Para você se convencer*

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e a Eq.(1.1.i). Consideremos $N = 10, 100, 1000, \ldots$ Então, conforme tabela a seguir, dado qualquer $N \in \mathbb{N}$ (explicitado para os três primeiros) podemos obter um n_0, tal que valham as respectivas desigualdades

$$N = 10, \quad n_0 = 4 \quad \Longrightarrow \quad \text{para} \quad n \geq 4 \quad \text{temos} \quad a_n \leq \frac{1}{4^2} < \frac{1}{10}$$

$$N = 100, \quad n_0 = 11 \quad \Longrightarrow \quad \text{para} \quad n \geq 11 \quad \text{temos} \quad a_n \leq \frac{1}{(11)^2} < \frac{1}{100}$$

$$N = 1000 \quad n_0 = 32 \quad \Longrightarrow \quad \text{para} \quad n \geq 32 \quad \text{temos} \quad a_n \leq \frac{1}{(32)^2} < \frac{1}{1000}$$

e assim por diante. Note que, quanto maior for o N, menor é o respectivo a_n. Logo, para um N tão grande quanto se queira, menor será o respectivo a_n. Dizemos, então, que o termo a_n se aproxima de zero (um número), isto é, tende a zero e dizemos que zero é o limite da sequência (a_n).

Com esse simples exemplo, introduzimos, mesmo que informalmente o conceito de limite. Esse conceito, que vamos abordar ainda nesse Capítulo, será formalizado e estudado no Capítulo 7, após o conceito de função. Ainda mais, desempenha papel central tanto na definição de derivada, conforme Capítulo 8, quanto na definição de integral, conforme Capítulo 9. É importante mencionar que o limite, em geral, é uma expressão para calcular um erro, relativo a uma mudança, e, por extensão de linguagem, o cálculo é a ferramenta para estudar essa mudança. Antes de voltarmos aos limites, vamos apresentar a definição de vizinhança.

DEFINIÇÃO 1.1.3. *Vizinhança*

Seja $L \in \mathbb{R}$. Chama-se vizinhança do número L a cada intervalo da forma

$$\left(L - \frac{1}{N}, L + \frac{1}{N}\right),$$

vizinhança aberta ou

$$\left[L - \frac{1}{N}, L + \frac{1}{N}\right],$$

vizinhança fechada.

DEFINIÇÃO 1.1.4. *Limite de uma sucessão*

Sejam $L \in \mathbb{R}$ e $N \in \mathbb{N}$. Se, para todo $n \in \mathbb{N}$ (tão grande quando quisermos), existir $n_0(N)$, dependendo de N, tal que, para todo $n \geq n_0$, tenhamos

$$|a_n - L| < \frac{1}{N} \qquad \Longrightarrow \qquad L - \frac{1}{N} < a_n < L + \frac{1}{N}$$

dizemos que L é o limite da sequência (a_n). Ainda mais, se a sequência (a_n) tiver limite L, dizemos que é uma sequência convergente para L, caso contrário, uma sequência divergente.

Como já mencionado, a noção de limite está relacionada com termos da sequência com índices suficientemente grandes, de onde segue a notação: n cresce indefinidamente, ou ainda, n se aproxima ou tende ao infinito. Utilizamos a notação

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim a_n.$$

EXEMPLO 1.5. Eq.(1.1.i) e $N = 1000$.

A fim de exemplificar a definição anterior, voltemos a sequência Eq.(1.1.i) e consideremos $N = 1000$ (tão grande quanto se queira). Vamos procurar um índice n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ tenhamos

$$L - \frac{1}{1000} < a_n < L + \frac{1}{1000}$$

onde L, se existir, é o limite da sucessão. Consideremos $n_0 = 101$ e do termo geral segue $a_{101} = 1/10201 \simeq 0,00009803$, logo

$$L - 0,0001 < 0,00009803 < L + 0,0001$$

Então, nesse caso, dizemos que a sequência é convergente e converge para zero, isto é, o limite da sucessão é $L = 0$.

EXEMPLO 1.6. Outras sucessões

Seja $b \in \mathbb{R}$. A sequência: $b, b, b, \ldots, b, \ldots$ tem limite igual a b; A sequência: $b, -b, b, -b, \ldots$ não tem limite; A sequência: $1, 2, 3, b, b, \ldots$ tem limite igual a b.

DEFINIÇÃO 1.1.5. *Limite de uma sucessão. Outra maneira.*

Seja (a_n) uma sequência de números reais. Se existe um número real $k > 0$ e, para cada número $N \in \mathbb{N}$, um índice n_0 tal que $|a_n - L| < k/N$ para $n \geq n_0$, então $\lim a_n = L$.

EXEMPLO 1.7. *Ainda a Propriedade* P.1

Consideremos, por exemplo, $k = 5$ e $N = 1000$. Logo, podemos escrever

$$L - \frac{5}{1000} < a_n < L + \frac{5}{1000}.$$

Seja, apenas para comparar, o mesmo $n_0 = 101$ de onde segue que

$$L - \frac{5}{1000} < \frac{1}{10201} < L + \frac{5}{1000}.$$

E, em analogia à maneira anterior, o resultado é o mesmo.

Visto que uma sequência convergente tem um limite, parece natural a seguinte pergunta: como saber se a sequência é convergente? Em princípio, poder-se-ia ir testando número a número, porém existe uma maneira mais adequada, o chamado critério de Cauchy. Esse critério é uma maneira de discernir se uma sequência é convergente sem, entretanto, ter que calcular o limite. Antes de apresentarmos esse critério, necessitamos da definição de sequência de Cauchy e uma sua consequência natural.

DEFINIÇÃO 1.1.6. *Sequência de Cauchy*

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Dizemos que uma sequência (a_n) de número reais é uma sequência de Cauchy, ou ainda, uma sequência fundamental, quando, dado $N \in \mathbb{N}$, existir um n_0 de modo que, se $m, n \geq n_0$ então $|a_m - a_n| < \dfrac{1}{N}$.

EXEMPLO 1.8. *Exemplificando uma sequência de Cauchy*

Consideremos $m = 32$ e $n = 11$ de modo a calcular os respectivos a_{32} e a_{11} conforme Eq.(1.1.i). Temos $a_{32} = 1/(32)^2$ e $a_{11} = 1/(11)^2$ cujo módulo é tal que (note que $n_0 = 11$)

$$\left|\frac{1}{(32)^2} - \frac{1}{(11)^2}\right| = \left|\frac{1}{1024} - \frac{1}{121}\right| = \left|-\frac{903}{1024\cdot 121}\right| < \frac{1}{1000}$$

ou seja, é uma sequência fundamental.

DEFINIÇÃO 1.1.7. *Sequência limitada*

A partir da DEFINIÇÃO 1.1.6 temos que: o conjunto dos termos de uma sequência fundamental é limitado. Ainda mais, toda sequência convergente de números reais é uma sequência fundamental.

TEOREMA 1.1.1. *Teorema de Cauchy*

Uma sequência de números reais é convergente se, e somente se, for uma sequência fundamental.

Esse teorema garante que se a sequência for uma sequência de Cauchy (sequência fundamental) então a sequência de números reais é convergente, sem a necessidade de calcularmos o limite.

Passemos agora a discutir os dois casos particulares de sequências que, como já afirmamos, foram introduzidas no EM, a saber: a sequência associada a somas e subtrações, conhecida pelo nome de progressão aritmética (PA) e a sequência associada a mutiplicações e divisões, conhecida pelo nome de progressão geométrica (PG).

1.2 Progressão aritmética

Nessa seção, após introduzirmos o conceito de PA, vamos calcular a soma dos n primeiros termos dessa PA e apresentar dois exemplos bastante característicos relativos ao conceito de PA.

DEFINIÇÃO 1.2.1. *Progressão aritmética*

Chama-se PA a toda sequência $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ de modo que todo termo, a partir do segundo, subtraído do seu antecedente, é um número fixo chamado razão da progressão e denotado por r.

Alternativamente, pode-se definir PA como sendo uma sucessão de números tais que, cada um, a partir do segundo, é igual ao seu antecedente mais um número constante não nulo. Então, no lugar da subtração, utilizamos a soma.

Geometricamente, uma PA pode ser vista como uma sequência de pontos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ tais que estão igualmente espaçados na reta, o que equivale a dizer que: todo consequente subtraído do seu antecedente não depende do índice, isto é, $a_{i+1} - a_i$ é independente de i. Vamos voltar nesse tópico após a introdução do conceito de função, conforme Capítulo 6.

DEFINIÇÃO 1.2.2. *Termo geral de uma* PA

Sejam a_1 o primeiro termo, r a razão e n o número de termos de uma PA. A expressão que fornece o termo geral, denotado por a_n, é dada por

$$a_n = a_1 + (n-1)\,r. \tag{1.2}$$

PROPRIEDADE 1.2.1. *Média aritmética*

Todo termo de uma PA, excetuando-se os extremos, é a média aritmética entre o termo precedente e o seu consequente.

DEFINIÇÃO 1.2.3. *Interpolação*

Interpolar ou inserir m meios aritméticos entre dois números x e y é obter uma nova PA com $m+2$ termos, sendo x e y os extremos.

EXEMPLO 1.9. *Soma dos extremos*

Vamos mostrar que em uma PA limitada de razão r, a soma de termos equidistantes dos extremos é igual a soma dos extremos. Sejam a_1 e a_n os extremos de uma PA. Seja $k < n$. Denotemos por a_{k+1} e a_{n-k} dois termos equidistantes dos extremos. Da Eq.(1.2) podemos escrever

$$a_{k+1} = a_1 + kr \qquad \text{e} \qquad a_{n-k} = a_n - kr$$

cuja soma permite escrever

$$a_{k+1} + a_{n-k} = a_1 + a_n$$

isto é, no segundo membro temos a soma dos extremos.

DEFINIÇÃO 1.2.4. *Soma dos termos de uma* PA

Sejam a_1 o primeiro termo, r a razão e n o número de termos de uma PA. A soma dos termos de uma PA, denotada por S_n, é dada por

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n. \tag{1.3}$$

EXEMPLO 1.10. *Cálculo da soma dos termos de uma* PA

Seis números formam uma PA. Sabendo que a soma dos três primeiros é 33 e a soma dos terceiro, quarto e quinto é 69, determine o sexto termo.

Aqui, podemos pensar, primeiramente, nos cinco primeiros termos da PA, pois em sabendo quais são, determina-se a razão e imediatamente o sexto termo. No caso de uma PA com um número ímpar de termos é conveniente fixar o termo central e subtrair para a esquerda e somar para a direita, um múltiplo inteiro da razão, conforme o esquema a seguir:

$$\begin{array}{ccccc} A_1 & A_2 & \underbrace{A_3} & A_4 & A_5 \\ a_1 - 2r & a_1 - r & a_1 & a_1 + r & a_1 + 2r. \end{array}$$

Consideremos, agora, a PA com primeiro termo igual a $a_1 - 2r$ e razão r. Utilizando os dados do enunciado podemos escrever o seguinte sistema de duas equações e duas incógnitas, já simplificando,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_1 - r & = & 11 \\ a_1 + r & = & 23 \end{array} \right.$$

com solução $a_1 = 17$ e $r = 6$. Segue, então, que o sexto termo é dado por $a_6 = a_1 + 3r = 35$.

EXEMPLO 1.11. *Soma dos n primeiros ímpares*

Mostre que a soma dos n primeiros números ímpares é n^2.

A sequência dos n primeiros números ímpares é: $1, 3, 5, 7, \ldots, a_n$. Queremos mostrar que a soma

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + a_n$$

é igual a n^2. Visto que o primeiro termo é $a_1 = 1$ e a razão $r = 2$ o enésimo termo é $a_n = 2n - 1$. Utilizando a Eq.(1.3) podemos escrever

$$S_n = \frac{1 + (2n - 1)}{2} \cdot n = n^2$$

que é o resultado desejado.

EXEMPLO 1.12. *Olimpíada Italiana de Matemática/*91

Seja $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ uma PA crescente de n termos (isto é, a diferença entre dois termos consecutivos é uma constante positiva). Pergunta-se para quais valores de n podemos encontrar três termos na PA cuja média aritmética é igual a média aritmética da PA inteira.

Sejam r a razão, a_1 o primeiro termo e $a_k = a_1 + (k-1)r$ o $k-$ésimo termo da PA. A média aritmética dos n termos é dada por

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} [a_1 + (k-1) \cdot r]$$

ou ainda, na seguinte forma, já somando

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \left(\frac{n-1}{2} \right) \cdot r.$$

Por outro lado, a média aritmética de três termos genéricos a_i, a_j, a_k é dada por

$$a_1 + \left(\frac{i+j+k}{3} - 1 \right) \cdot r.$$

Visto que queremos a igualdade das médias, já simplificando, devemos ter

$$2 \cdot (i + j + k - 3) = 3 \cdot (n - 1).$$

Agora devemos analisar essa igualdade. Note que o primeiro termo é par e o segundo termo é um número ímpar, logo n não pode ser par. Então, qualquer número ímpar satisfaz a igualdade, como pode ser verificado.

1.3 Progressão geométrica

Nessa seção, após introduzirmos o conceito de PG, vamos calcular a soma dos n primeiros termos dessa PG e apresentar dois exemplos bastante característicos relativos ao conceito de PG. O limite da soma dos termos de uma PG infinita é discutido com a notação introduzida nesse capítulo.

DEFINIÇÃO 1.3.1. *Progressão geométrica*

Chama-se PG a toda sequência $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ de modo que todo termo, a partir do segundo, dividido pelo seu antecedente, é um número fixo chamado razão da progressão e denotado por q.

Alternativamente, pode-se definir PG como sendo uma sucessão de números tais que, cada um, a partir do segundo, é igual ao seu antecedente multiplicado por um número constante não nulo e diferente da unidade. Então, no lugar da divisão, utilizamos a multiplicação.

DEFINIÇÃO 1.3.2. *Termo geral de uma* PG

Sejam a_1 o primeiro termo, q a razão e n o número de termos de uma PG. A expressão que fornece o termo geral, denotado por a_n, é dada por

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}. \tag{1.4}$$

PROPRIEDADE 1.3.1. *Média geométrica*

Todo termo de uma PG, excetuando-se os extremos, é a média geométrica entre o termo precedente e o seu consequente.

DEFINIÇÃO 1.3.3. *Interpolação*

Interpolar ou inserir m meios geométricos entre dois números x e y é obter uma nova PG com $m+2$ termos, sendo x e y os extremos.

EXEMPLO 1.13. *Produto dos extremos*

Vamos mostrar que em uma PG limitada de razão q, o produto de termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos. Para tanto, consideremos a_1 e a_n os extremos de uma PG. Seja $k < n$. Denotemos por a_{k+1} e a_{n-k} dois termos equidistantes dos extremos. Da Eq.(1.4) podemos escrever

$$a_{k+1} = a_1 \cdot q^k \qquad \text{e} \qquad a_{n-k} = a_n \cdot q^{-k}$$

cujo produto permite escrever

$$a_{k+1} \cdot a_{n-k} = a_1 \cdot a_n$$

isto é, no segundo membro temos o produto dos extremos.

DEFINIÇÃO 1.3.4. *Soma dos termos de uma* PG

Sejam a_1 o primeiro termo, q a razão e n o número de termos de uma PG. A soma dos termos de uma PG, denotada por S_n, é dada por

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}. \tag{1.5}$$

PROPRIEDADE 1.3.2. *Produto dos termos de uma* PG

O produto dos n primeiros termos de uma PG limitada, denotado por P_n, é a média geométrica das potências n dos termos extremos,

$$P_n = \sqrt{a_1^n \cdot a_n^n}. \tag{1.6}$$

EXEMPLO 1.14. *Quadrado do número de ouro*

Mostre que a razão de uma PG em que três termos consecutivos são os lados de um triângulo retângulo é dada por

$$q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}.$$

Sejam a, um dos catetos e $q > 1$ a razão da PG. Podemos escrever para o outro cateto (definição de PG) a/q enquanto para a hipotenusa $a \cdot q$. Utilizando o teorema de Pitágoras, podemos escrever

$$(a \cdot q)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{q}\right)^2$$

e, visto que $a \neq 0$ obtemos a equação algébrica para q

$$q^4 - q^2 - 1 = 0$$

cuja solução é o resultado desejado. $q^2 = (1+\sqrt{5})/2$ é o chamado número de ouro.

1.3.1 Limite da soma

Aqui vamos discutir um caso particular de PG. Consideremos uma PG com infinitos termos e a razão q satisfazendo a dupla desigualdade $-1 < q < 1$. A partir da Eq.(1.5) podemos escrever

$$S_n = \frac{a_1}{1-q} + \frac{q^n}{q-1}.$$

Note que a primeira parcela no segundo membro é independente de n. Tomando o limite $n \to \infty$, isto é, considerando n tão grande quanto se queira, podemos escrever, utilizando a notação introduzida no início do capítulo e que será formalizada imediatamente após o conceito de função, no Capítulo 7,

$$\lim_{n\to\infty} S_n \equiv S = \frac{a_1}{1-q}. \tag{1.7}$$

uma vez que, nesse limite, temos $q^n \to 0$.

EXEMPLO 1.15. *Quadrados inscritos*

Em um círculo de raio r inscreve-se um quadrado, nesse quadrado inscreve-se um círculo, nesse círculo um outro quadrado e assim sucessivamente. Calcular o limite da soma das áreas dos círculos.

A área do círculo[1] é $A_C = \pi r^2$, unidades de área. Utilizando o teorema de Pitágoras obtemos o lado do quadrado inscrito, denotado por ℓ. Então, conforme Figura 1.1

$$r^2 = \frac{\ell^2}{4} + \frac{\ell^2}{4}$$

[1] Esse resultado, conhecido desde o Ensino Fundamental (EF), será mostrado no Capítulo 9, quando apresentarmos o conceito de integral definida.

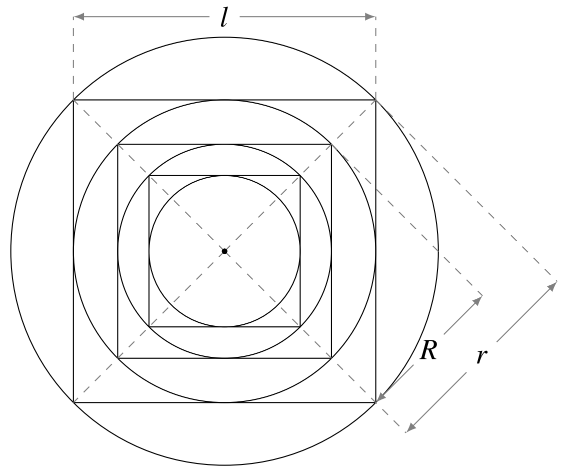


Figura 1.1: Quadrados inscritos em círculos inscritos em quadrados.

de onde segue $\ell = r\sqrt{2}$. Mais uma vez o teorema de Pitágoras permite calcular o raio do círculo inscrito no quadrado de lado $\ell = r\sqrt{2}$, de onde segue $R = r/\sqrt{2}$. Disso, segue que a área do círculo inscrito no quadrado é igual a $\pi r^2/2$ e assim sucessivamente. Temos, então uma PG de razão $1/2$, a saber

$$\pi r^2, \pi r^2/2, \pi r^2/4, \ldots$$

cuja soma, dada pela Eq.(1.7), fornece $S = 2\pi r^2$.

Finalizamos o capítulo mencionando que as progressões geométricas estão associadas com o crescimento exponencial, que será discutido no Capítulo 2, bem como tem aplicações na chamada matemática financeira e que estão presentes em alguns exercícios deixados a cargo do leitor.

Agora, como mencionamos no início do capítulo, vamos mostrar que a base dos logaritmos (Capítulo 2) neperianos e é um número que satisfaz a dupla desigualdade $2 < e < 3$. A fim de atingirmos nosso objetivo, comecemos com a desigualdade de Bernoulli.

EXEMPLO 1.16. *Desigualdade de Bernoulli*

Sejam $n > 1$ um número natural e a um número positivo qualquer. Vamos mostrar que vale a seguinte desigualdade

$$(1+a)^n > 1+na\,, \qquad n = 2, 3, \ldots\,, \qquad a > 0.$$

Escrevendo-a por extenso, no caso $n = 2$, temos

$$1 + 2a + a^2 > 1 + 2a$$

de onde podemos concluir que $a^2 > 0$ para todo $a \neq 0$. Utilizando o princípio de indução finita, admitamos que a desigualdade é válida para um certo n e vamos mostrar a mesma desigualdade vale para $n+1$.

Multiplicando ambos os membros da desigualdade por $(1+a)$ e rearranjando, obtemos

$$(1+a)^{n+1} > 1 + (n+1)a + na^2.$$

Ora, visto que $a^2 > 0$, implica em $na^2 > 0$, isto é, o segundo membro excede na^2 de $1+(n+1)a$, de onde segue, finalmente

$$(1+a)^{n+1} > 1+(n+1)a$$

que é exatamente o que tínhamos afirmado.

É interessante discutir dois casos, a saber: (i) $a = 0$ e n arbitrário. (ii) $n = 1$ e a arbitrário, a fim de reescrevermos a identidade de partida. Tanto num caso como no outro emergem desigualdades do tipo $1 > 1$ que não são verdadeiras, porém se tornam verdadeiras se reescrevemos a desigualdade na forma

$$(1+a)^n \geq 1+na\,, \qquad n = 1,2,3,\ldots\,, \qquad a > -1$$

como se pode verificar diretamente.

EXEMPLO 1.17. *Desigualdade* $2 < e < 3$

Enfim, vamos verificar a desigualdade relativa ao número e. Começamos com a sequência dada pela Eq.(1.1.ii) cujo termo geral é dado por

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Como sabemos, essa sequência é estritamente crescente e limitada superiormente o que nos leva a concluir que seu limite é um número real o qual será denotado por e. Vamos agora verificar que vale a desigualdade $a_n < a_{n+1}$ para $n \in \mathbb{N}$. Podemos, então, escrever

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n})^n}$$

que, após uma simples manipulação e simplificação, permite expressar o quociente na seguinte forma

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^n.$$

A partir da desigualdade de Bernoulli (EXEMPLO 1.16) tem-se

$$\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^n \geq 1-n\cdot\frac{1}{(n+1)^2}$$

de onde segue a desigualdade

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left[1-\frac{n}{(n+1)^2}\right] = 1+\frac{1}{(n+1)^3} > 1.$$

Enfim, devemos, agora, mostrar que essa sequência é limitada superiormente, o que vamos fazer utilizando a expansão binomial, isto é, a partir da expressão

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{1}{n^n}$$

que pode ser reescrita na forma (fatorando n nos numeradores e cancelando com os denominadores)

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\\ &\quad +\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).\end{aligned}$$

Visto que, para $n \geq 1$, vale a desigualdade

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

que, substituída na anterior, levando em consideração os sinais, isto é, não teremos mais uma igualdade e sim uma desigualdade,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

O termo entre parênteses nada mais é que o limite da soma dos termos de uma progressão geométrica de primeiro termo igual à unidade e razão $1/2$, logo

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3-\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Concluímos que a sequência é monótona crescente e limitada, tendo limite entre $2 < a_n < 3$. Note que, a desigualdade $a_n > 2$ é imediata, isto é, segue diretamente da expressão para a_n.

1.4 Exercícios propostos

1. Seja $n = 1, 2, 3, \ldots$ Escreva os cinco primeiros termos da sequência cujo termo geral é dado por $a_n = \dfrac{n!}{2^n}$.

2. Seja $n = 1, 2, 3, \ldots$ Escreva os quatro primeiros termos da sequência cujo termo geral é dado por $a_n = \dfrac{2n}{n+1}$.

3. Verifique que a sequência com termo geral $a_n = \dfrac{2n}{n+1}$ é convergente.

4. Considere uma sequência de primeiro termo igual a $2/3$. Escreva a sequência sabendo que o numerador cresce de uma unidade enquanto o denominador cresce de três unidades.

5. Seja $a_1 = 3/4$ o primeiro termo de uma sequência. Escreva os quatro primeiros termos dessa sequência sabendo que o numerador cresce de uma unidade e o denominador é o quadrado do numerador do termo que o antecede.

6. Escreva a expressão do termo geral da sequência do Ex.5.

7. Escreva o termo geral das sequências

   a) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{8}, \cdots$ e b) $1, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{7}, \cdots$

8. Verifique se as sequências do Ex.7 são convergentes.

9. Escreva o termo geral das sequências

$$\text{a)}\quad 1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \cdots \qquad \text{e} \qquad \text{b)}\quad \frac{1}{2}, \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 4}, \frac{1}{4\cdot 5}, \cdots$$

10. Verifique se as sequências do Ex.9 são convergentes.

11. Mostre a expressão dada pela Eq.(1.3).

12. Sejam $a > 0$ e as três expressões

$$a^2 - 2a - 1, \quad a^2 + 1, \quad a^2 + 2a - 1.$$

Mostre que essas expressões não são três termos de uma PA, porém o quadrado delas sim.

13. Obtenha uma expressão para a soma dos n primeiros números pares.

14. (Olimpíada Italiana/93) Considere a equação $x^3 - 6ax^2 - (a^2+1)x = 0$. Para quantos valores do parâmetro a a equação admite três raízes reais em progressão aritmética?

15. (Olimpíada Italiana/93) Determine todos os triângulos retângulos tendo os comprimentos dos lados em PA.

16. Mostrar a expressão para o termo geral da sequência: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ sabendo que todo termo, a partir do segundo, dividido pelo seu antecessor, é um número fixo chamado razão e denotado por q.

17. Seja $n \geq 1$. Escreva uma expressão para a soma dos termos de uma progressão geométrica, com primeiro termo igual a a_1 e razão q.

18. Utilize a Eq.(1.5) a fim de discutir o caso em que temos um número de termos tendendo para o infinito e a razão no intervalo $-1 < q < 1$. Separadamente, discuta os dois extremos $q = -1$ e $q = 1$.

19. Mostre o resultado da Eq.(1.6).

20. $0.1212\ldots$ é racional?

21. Considere dois números diferentes de zero. Mostre que a média aritmética é maior que a média geométrica, valendo a igualdade se os números são iguais.

22. Resolva as seguintes equações envolvendo o módulo, $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{a)}\quad |x-4| = 2 \qquad \text{e} \qquad \text{b)}\quad \left|\frac{3}{2}x - 1\right| = \left|\frac{1}{2}x + 1\right|$$

23. Resolva as seguintes inequações:

$$\text{a)}\quad |2x-5| < 3 \qquad \text{e} \qquad \text{b)}\quad |4-3x| \geq 2$$

24. A desigualdade $|x-2|<6$ pode ser representada por $a<x<b$. Quais os valores para a e b?

25. A desigualdade $-4 \le x \le 10$ pode ser representada da seguinte forma $|x-a| \le b$. Quais os valores de a e b?

26. Sejam $x \in \mathbb{R}$, A o conjunto solução de $|2x-3| \le 5$ e B o conjunto solução de $|3x+2| \ge 7$. Obtenha os conjuntos

$$\text{a) } \mathsf{A} \cup \mathsf{B} \qquad \text{e} \qquad \text{b) } \mathsf{A} \cap \mathsf{B}$$

27. Resolva as seguintes inequações em $\mathbb{R}$:

$$\text{a)} \quad 5-3|x-4| \ge -4 \qquad \text{e} \qquad \text{b)} \quad 3|1-x|-4 \ge |1-x| \cdot$$

28. São dadas duas progressões: uma aritmética (PA) e uma geométrica (PG). Sabe-se que: a) a razão da PG é 2; b) em ambas o primeiro termo é igual a 1; c) a soma dos termos da PA é igual a soma dos termos da PG e d) ambas têm 4 termos. Determine a razão da PA.

29. Seja $x \in \mathbb{R}$. Esboce o gráfico de $f(x) = |x-1|+2$.

30. Simplifique $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para $h \neq 0$ sendo $f(x) = x^2+3x$.

31. Os últimos jogos Panamericanos ocorreram em 2015, na cidade de Toronto, Canadá. Os últimos jogos Olímpicos, foram realizados em 2016 na cidade do Rio de Janeiro (Brasil). A última Copa do Mundo de Futebol foi realizada na Rússia, em 2018. Sabe-se que todos esses eventos ocorrem de quatro em quatro anos.

    a) Em que ano ocorrerá mais de um desses eventos? Justifique a resposta. b) A cidade de Roma, acredita-se, foi fundada em 753 a.C. e o dia 21 de abril foi oficializado como o dia da sua fundação. É possível comemorar os 2345 anos da fundação de Roma com uma Copa do Mundo na Itália? Justifique sua resposta.

32. (Vunesp/2003) Várias tábuas estão em uma madeireira. A espessura de cada tábua é 0,5 cm. Forma-se uma pilha de tábuas colocando-se uma tábua na primeira vez e, em cada uma das vezes seguintes, tantas quantas já tiverem sido colocadas anteriormente. Ao final de nove operações, responda: a) quantas tábuas terá a pilha? b) qual será a altura da pilha?

33. Seja $a>0$. Calcule $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\cdots}}}}$.

34. Determine a geratriz das dízimas: a) $2,333\ldots$; b) $2,1333\ldots$; c) $2,131313\ldots$

35. (FGV/94.) As progressões aritméticas $a_1, a_2\ldots$ e $b_1, b_2\ldots$ têm razões, respectivamente, iguais a 3 e a 7. a) Sabendo-se que $a_5 = b_3$, qual é o menor valor de r, superior a 5, para o qual existe s tal que $a_r = b_s$? b) Se os elementos comuns a essas duas progressões forem colocados em ordem crescente eles formarão uma PA. Calcule a razão desta PA.

36. (FGV/95.) A população brasileira é, hoje, de 150 milhões de pessoas. Prevê-se que será de 250 milhões de pessoas daqui a 55 anos, em 2050. Calcule a taxa anual média de crescimento da população brasileira no período mencionado, em percentagem ao ano. Observe que a taxa de crescimento de um ano se aplica sempre à população do ano anterior e que é constante durante todo o período considerado.

37. (FGV/96-Adaptado.) Para todo n natural não nulo, sejam as sequências

$$(3,5,7,9,\ldots,a_n,\ldots), \qquad (3,6,9,12,\ldots,b_n,\ldots), \qquad (c_1,c_2,c_3,\ldots,c_n,\ldots)$$

com $c_n = a_n + b_n$. Determine c_{20}.

38. (FGV/96.) Um terreno hoje vale A reais e esse valor fica 20% maior a cada ano que passa (em relação ao valor de um ano atrás). a) Qual o seu valor daqui a n anos? Qual a valorização sofrida ao longo do enésimo ano expressa em reais? b) Daqui a quantos anos aproximadamente o valor do terreno triplica? *Nota: não é obrigatório efetuar os cálculos, basta deixá-los indicados.*

39. (ITA/94-Adaptado.) Seja $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ uma progressão geométrica com um número ímpar de termos e razão $q > 0$. O produto de seus termos é igual a 2^{25} e o termo do meio é 2^5. Se a soma dos $(n-1)$ primeiros termos é igual a $2(1+q)(1+q^2)$, determine uma relação entre a_1, q e n.

40. (FGV/95-Adaptado.) Sabendo que a soma dos termos da progressão geométrica $0,3 : 0,03 : 0,003 : \ldots$ é igual ao termo médio de uma progressão aritmética de três termos, determine a soma dos termos dessa progressão aritmética.

41. (Vunesp/94.) Sejam a, b e c três números reais estritamente positivos e tais que $a < b+c$. Se a, b, c, formam, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão q, prove que: a) $q^2+q-1>0$ e b) $q > \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\cdot$

42. (Vunesp/95.) Considere as sequências (o_n) e (t_n), $n = 1,2,3,\ldots$, cujos termos gerais são, respectivamente, $o_n = n(n+1)$ e $t_n = n(n+1)/2$. Demonstre que, para todo $n \geq 1$, $t_{2n} = o_n + n^2$.

43. (Vunesp/95-Adaptado.) A sequência de números reais a, b, c, d forma, nessa ordem, uma progressão aritmética cuja soma dos termos é 110; a sequência de números reais a, b, e, f forma, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão 2. Determine a soma $d+f$.

44. Interpolar 3 meios aritméticos entre os números $1/2$ e $21/2$.

45. Interpolar 3 meios geométricos entre os números 8 e $81/2$.

46. Determinar os ângulos internos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$ de um quadrilátero, sabendo que $\hat{A} < \hat{B} < \hat{C} < \hat{D}$, e que esses ângulos estão em progressão geométrica com $\hat{C} = 9\hat{A}$.

47. Sejam $a_1,a_2,a_3 \in \mathbb{N}$ três termos de uma PG de razão 5. Mostre que a soma dos três termos dessa PG é um múltiplo de 31.

48. Considere uma PA com três termos sendo a razão igual ao primeiro termo. Mostre que o cubo da razão é $1/6$ do produto desses três termos.

49. Seja uma PA de razão e primeiro termos iguais a 4. Determine o terceiro termo da PG cujo primeiro e segundo termos são o segundo e o terceiro termos da PA.

50. O termo médio de uma PA de cinco termos é igual ao termo médio de uma PG de três termos. Sabendo que a razão da PA é 5 e o primeiro termo 8, determine o produto dos extremos da PG.

51. (Fuvest/94-Adaptado.) Em uma progressão aritmética de termos positivos, os três primeiros termos são $1-a$, $-a$, $\sqrt{11-a}$. Determine o quarto termo desta progressão.

52. Os dois primeiros termos de uma progressão geométrica de três termos são: $(\sqrt{6}-\sqrt{2})/2$ e 1. Determine a soma dos três termos dessa progressão geométrica.

53. (Unicamp/94.) Dada uma sequência qualquer $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, tem-se:

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{j-1}-a_j) = (a_0-a_1)+(a_1-a_2)+\cdots+(a_{n-1}-a_n) = a_0-a_n.$$

No caso em que $a_j = j^3$, essa identidade toma a forma

$$\sum_{j=1}^{n}[(j-1)^3-j^3] = 0^3-n^3 = -n^3.$$

Use essa identidade para mostrar que

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = 1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}.$$

1.4.1 Respostas e/ou sugestões

1. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{15}{4}$.
2. $1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}$.
3. A sequência converge para 2.
4. $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, \cdots$
5. $\frac{3}{4}, \frac{4}{3^2}, \frac{5}{4^2}, \frac{6}{5^2}$.
6. $a_n = \frac{n+2}{(n+1)^2}$, com $n = 1, 2, 3, \ldots$
7. a) $a_n = \frac{1}{2n}$; b) $a_n = \frac{1}{2n-1}$, com $n = 1, 2, 3, \ldots$.
8. a) Convergente; b) Convergente.
9. a) $a_n = \frac{1}{n^2}$; b) $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$, com $n = 1, 2, 3, \ldots$.
10. a) Convergente; b) Convergente.
11. Escreva a PA de duas maneiras, do primeiro para o último termo e do último para o primeiro e efetue a soma.
12. Direto da definição de PA.
13. Racionínio análogo ao discutido no EXEMPLO 1.11, para obter $S_n = n(n+1)$.

14. Apenas um valor, $a = 0$. Note que $x = 0$ é raiz o que implica que as outras duas devem ter soma nula.

15. Chame um dos catetos de x, o outro de $x-r$ e a hipotenusa $x+r$ e utilize o teorema de Pitágoras a fim de mostrar que são os múltiplos de 3, 4, 5.

16. Direto da definição de PG para obter $a_n = a_1\, q^{n-1}$.

17. Direto da definição de PG e soma dos termos da PG para obter $S_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q-1}$.

18. Ver Seção 1.3.1.

19. Escreva a PG de duas maneiras, do primeiro para o último termo e do último para o primeiro e efetue a produto.

20. Sim e igual a $4/33$.

21. Conforme texto.

22. a) $x = 2$, $x = 6$ e b) $x = 0$, $x = 2$.

23. a) $\{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 4\}$ e b) $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 2/3 \text{ ou } x \geq 2\}$.

24. $a = -4$ e $b = 8$.

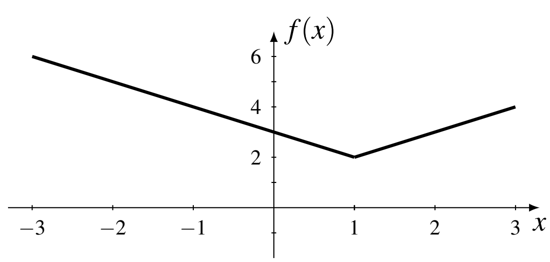
25. $a = 3$ e $b = 7$.

26. a) $(-\infty, -3] \cup [-1, \infty]$ e b) $[5/3, 4]$.

27. a) $\{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 7\}$ e b) $\{x \in \mathbb{R} : x \leq -1 \text{ ou } x \geq 3\}$.

28. $11/6$.

29. Esboço gráfico.



30. $h + 2x + 3$.

31. a) Não ocorrerá mais de um evento no mesmo ano, pois o resto da divisão por quatro deixa resto 0, 2 ou 3. b) Sim, é possível, pois a divisão de 2098=2345-247 por quatro, deixa resto dois.

32. a) 256 e b) 128 cm.

33. a.

34. a) $7/3$; b) $32/15$; c) $211/99$.

35. a) $r = 12$; b) $r = 21$.

36. $0,93\%$.

37. 101.

38. a) $A \cdot (1,2)^n$; b) 6 anos.

39. $a_1 + q + n = 11$.

40. 1.

41. Direto da definição de PG.

42. Direto da definição de PG.

43. 132.

44. 3, $11/2$, 8.

45. 12, 18, 27.

46. 9°; 27°; 81°; 243° .

47. Direto da definição de PG.

48. Direto da definição de PA.

49. Direto da definição de PA.

50. 324.

51. Mostre que o único valor de a é -5 e conclua que o quarto termo é 3.

52. $\sqrt{6} + 1$.

53. Use a expressão $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot 1 + 3 \cdot x \cdot 1^2 + 1^3$ fazendo x tomar valores de 1 até n.

Capítulo 2

Logaritmo e exponencial

Aplica-se uma importância C numa instituição financeira, no regime de juros compostos, à taxa de $i\%$ ao mês. Após quanto tempo, t, o montante será M? Quanto tempo depois terei o meu capital duplicado?

2.1 Logaritmos

Começamos por mencionar a utilidade dos logaritmos, pois desempenham papel central em várias aplicações como, por exemplo, na escala Richter, utilizada para monitorar e quantificar a magnitude de um terremoto; no potencial hidrogeniônico, no estudo do pH de uma solução, associado à acidez, à alcalinidade ou a neutralidade, bem como no estudo de aplicações envolvendo juros compostos, dentre outras. Não podemos, também, deixar de citar que, após as calculadoras e seus sucessores, o cálculo dos logaritmos foi um pouco deixado à parte. Por exemplo, hoje nas escolas de EM sequer menciona-se o nome das palavras cologaritmo e mantissa, muito menos tábuas de logaritmos.

DEFINIÇÃO 2.1.1. *Logaritmo*

Sejam $a \in \mathbb{R}_+$ e $1 \neq b > 0$. Chama-se o logaritmo do número a (logaritmando) na base b, com notação $\log_b a$, o expoente ao qual a base deve ser elevada, a fim de que a potência a ser obtida, de base b, seja igual a a,

$$\log_b a = x \qquad \Leftrightarrow \qquad a = b^x.$$

DEFINIÇÃO 2.1.2. *Sistemas de logaritmos*

Chama-se um sistema de logaritmos ao conjunto dos logaritmos de todos os número reais e positivos, numa determinada base, desde que definida, isto é, positiva e diferente da unidade.

Devido a infinidade de números associados à base, desde que definida, é possível obter vários sistemas de logaritmos. Os dois mais utilizados são os logaritmos decimais, isto é, a base é igual a 10 e os neperianos (ou naturais) cuja base é o número e, introduzido no Capítulo 1, onde foi mostrado que $2 < e < 3$. Na notação do logaritmo neperiano é costume omitir a base, isto é, $\ln_e \equiv \ln$. Excetuando-se a base e e a base 10, decimal, onde, também, omite-se a base, denotado $\log_{10} = \log$, o valor da base deve ser explicitado. Em geral, no EM, os logaritmos decimais são os únicos abordados.

Aqui, vamos nos dedicar aos logaritmos naturais, pois é grande o número de aplicações onde a base é o número $e \simeq 2,71828$ (um número transcendental [14]), em particular, no estudo das chamadas equações diferenciais ordinárias com coeficientes constantes, pois, como vamos ver no Capítulo 8, isso se justifica uma vez que a derivada de uma exponencial de base e é a própria exponencial a menos de um fator multiplicativo. Preferimos introduzir o número e através de uma área, em particular, a área abaixo de uma curva chamada hipérbole o que será feito após o conceito de integral definida, conforme Capítulo 9.

Como já mencionamos, vamos nos concentrar nos logaritmos neperianos, com base $e > 1$, mas tenhamos em mente que as propriedades que vamos apresentar a seguir, são válidas para uma base arbitrária, desde que seja positiva e diferente da unidade. Começamos com as propriedades gerais e depois com as operatórias, culminando com a chamada mudança de base. Tal expressão permite passar de um sistema de base para um outro, desde que as bases estejam definidas, isto é, positivas e diferentes da unidade.

PROPRIEDADE 2.1.1. *Logaritmo da unidade é zero*

Em qualquer sistema de logaritmos, o logaritmo da unidade é zero. $\ln 1 = 0$ o que implica em $1 = e^0$, pois todo número diferente de zero elevado a zero é igual à unidade.

PROPRIEDADE 2.1.2. *Logaritmo da base na base é um*

Consideremos um sistema de base e. Temos $\ln e = 1$, isto é, toda vez que o logaritmando for igual à base, o logaritmo é a unidade.

PROPRIEDADE 2.1.3. *Número maior que a unidade, logaritmo crescente*

Os logaritmos dos números maiores que a unidade são positivos e crescem indefinidamente. Em particular, costuma-se denotar $\ln(+\infty) \to +\infty$.

EXEMPLO 2.1. *Mostre a dupla desigualdade* $\ln 2 < 1 < \ln 3$.

Conforme EXEMPLO 1.17 temos a desigualdade $2 < e < 3$. Visto que o logaritmo de um número maior que um é positivo, podemos tomar o logaritmo e utilizar a PROPRIEDADE 2.1.2 a fim de obter diretamente a dupla desigualdade.

PROPRIEDADE 2.1.4. *Número menor que a unidade, logaritmo decrescente*

Os logaritmos dos números positivos menores que a unidade são negativos e decrescem, aproximando-se de zero. Costuma-se denotar $\ln(+0) \to -\infty$.

A fim de apresentarmos as propriedades operatórias é conveniente fazer um paralelo com a potenciação, pois, como já mencionado, o logaritmo nada mais é que um particular expoente. Denotemos $\ln a = x$, $\ln b = y$ e $n \in \mathbb{N}$.

PROPRIEDADE 2.1.5. *Logaritmo do produto*

Temos $a \cdot b = e^{x+y}$ de onde, pela definição, segue $\ln(a \cdot b) = x + y$. O logaritmo do produto é a soma dos logaritmos, mantida a base

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b.$$

PROPRIEDADE 2.1.6. *Logaritmo do quociente*

Temos $a : b = e^{x-y}$ de onde, pela definição, segue $\ln(a : b) = x - y$. O logaritmo do quociente é a diferença dos logaritmos, mantida a base

$$\ln(a : b) = \ln a - \ln b.$$

PROPRIEDADE 2.1.7. *Logaritmo da potência*

Seja $n \in \mathbb{N}$. Escrevemos $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n}$ que, tomando o logaritmo de ambos os lados e usando a propriedade do produto, fornece

$$\ln a^n = \ln(\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n}) = \ln a + \ln a + \cdots + \ln a.$$

Logo, o logaritmo da potência é o produto do logaritmo pela potência, mantida a base

$$\ln(a^n) = n \cdot \ln a,$$

com $n \in \mathbb{R}$.

EXEMPLO 2.2. *Logaritmo de raiz*

Para todo $n > 0$, verifique a identidade

$$\log_n \left[\log_n \sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}} \right] = -3.$$

Começamos por escrever as três raízes na forma

$$\sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}} = n^{1/n^3}$$

de onde segue

$$\log_n \left[\log_n \left(n^{1/n^3} \right) \right].$$

Utilizando as PROPRIEDADES 2.1.2 e 2.1.7, podemos escrever

$$\log_n \left(1/n^3 \right) = \log_n n^{-3} = -3 \log_n n$$

de onde segue o resultado, isto é, o segundo membro.

Passemos, agora, a partir de um teorema, mostrar como é feita a passagem de um sistema de base para um outro sistema. Vamos mostrar que a razão entre os logaritmos de um número positivo, em dois sistemas diferentes, isto é, de bases distintas, é uma constante, às vezes chamada de módulo de um sistema em relação ao outro.

TEOREMA 2.1.1. *Mudança de base*

Seja $c \in \mathbb{R}_+$. Sejam $x = \log_a c$ e $y = \log_b c$ os logaritmos do número c nas bases a e b, respectivamente, tais que $1 \neq a > 0$ e $1 \neq b > 0$. Da definição de logaritmo, podemos escrever as igualdades $a^x = c$ e $b^y = c$ de onde segue, eliminando c, $a^x = b^y$. Vamos tomar o logaritmo de ambos os lados, escolhendo a base a (resultado semelhante é obtido se escolhêssemos a base b) e calcular o quociente y/x, logo

$$\frac{y}{x} = \frac{\log_a a}{\log_b a} = \frac{1}{\log_a b}.$$

Note, como havíamos afirmado, que o segundo membro é uma constante, nesse caso, chamada módulo do sistema de base b em relação ao sistema de base a. Ainda mais, se tivéssemos escolhido a base b, teríamos o módulo do sistema de base a em relação ao sistema de base b. Segue a expressão para a mudança de base

$$\log_a c = \log_a b \cdot \log_b c.$$

EXEMPLO 2.3. *Mudança de base decimal para natural*

Vamos considerar na expressão para a mudança de base $a = e$ e $b = 10$. Substituindo temos

$$\ln c = \ln 10 \cdot \log_{10} c$$

que, utilizando uma calculadora que tenha a função ln obtemos a igualdade

$$\ln c \simeq 2.3 \log_{10} c$$

isto é, para escrever o logaritmo de um número na base e, conhecido o logaritmo desse número na base 10, basta multiplicar pela constante 2.3. Vice versa, para escrever o logaritmo de um número na base 10, conhecido o logaritmo desse número na base e, basta dividir pela constante 2.3, que nada mais é que $\ln 10$.

EXEMPLO 2.4. *Olimpíada Matemática Italiana/*91

Sabendo que 2^{100} tem 31 cifras decimais, encontre quantas cifras tem 5^{100}.

Vamos considerar os logaritmos decimais. Visto que 2^{100} tem 31 cifras decimais, segue que o seu logaritmo decimal está compreendido entre 30 e 31, e por isso temos

$$\log_{10} 5^{100} = 100 \cdot \log_{10} 5 = 100 \cdot (1 - \log_{10} 2) = 100 \cdot (1 - 0{,}30) = 70.$$

Então, $\log_{10} 5^{100}$ está entre 69 e 70, o que significa que 5^{100} tem 70 cifras.

EXEMPLO 2.5. *Escala Richter*

A escala Richter é uma escala logarítmica com pontuação de 0 a 9 graus. A magnitude (graus) é o logaritmo da medida das amplitudes, determinadas pelos sismógrafos, das ondas produzidas pela liberação de energia do sismo. Sendo A a amplitude máxima e A_0 uma amplitude de referência, determinamos a chamada magnitude, denotada por M, a partir da expressão $M = \log A - \log A_0$. Essa expressão permite comparar as magnitudes de dois sismos. A fim de exemplificar com dados reais, consideramos os dois últimos sismos, em 2010 no centro e sul do Chile com 8.8 graus e em 2011 na península de Oshika, Japão com 9.0 graus e vamos comparar as amplitudes na escala Richter. Temos, então as magnitudes $M_J = 9,0$ (Japão) e $M_C = 8,8$ (Chile), ambas na escala Richter. Para comparar as amplitudes, substituímos os valores na expressão

$$M_J - M_C = (\log A_J - \log A_0) - (\log A_C - \log A_0) = \log A_J - \log A_C.$$

Note que, ao compararmos a constante é cancelada, isto é, não depende da constante. Segue, então,

$$\log A_J - \log A_C = 9,0 - 8,8 = 0,2 \qquad \Longrightarrow \qquad A_J = A_C \cdot \sqrt[5]{10}$$

isto é, as ondas do sismo A_J tinham amplitudes, aproximadamente, 1,6 vezes mais intensas do que as amplitudes das ondas do sismo no A_C.

Por outro lado, para calcular a energia liberada por um sismo, usamos a expressão

$$I = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

onde I é a intensidade[1] na escala Richter que varia de 0 a 9, E é a energia liberada em kW/h e $E_0 = 7 \cdot 10^{-3}\, kW/h$, uma constante.

Enfim, com os dados acima podemos mostrar que a energia liberada no sismo do Japão foi duas vezes maior que a energia liberada no sismo do Chile.

2.2 Exponenciais

Um fenômeno que representa relações envolvendo o conceito de proporcionalidade, fica caracterizado por uma expressão da forma $f(x) = ax + b$ com $a, b \in \mathbb{R}$ como, por exemplo, o variar da velocidade no movimento retilíneo uniformemente variável; o variar do preço de uma corrida de táxi, composta de uma bandeirada, custo fixo, e uma parte diretamente proporcional à quantidade de quilômetros percorridos (custo variável). Vamos identificar, no Capítulo 6, tal expressão como a caracterização de uma função afim.

Por outro lado, um movimento oscilatório fica caracterizado por uma função envolvendo uma função trigonométrica, seno ou cosseno, pois são funções periódicas, do tipo $f(x) = a \operatorname{sen} bx$ ou $f(x) = a \cos bx$ com $a, b \in \mathbb{R}$, como será abordado no Capítulo 6. Um exemplo clássico é caracterizado por uma mola presa em uma extremidade e em equilíbrio, quando colocada em movimento passa a oscilar em torno do ponto de equilíbrio. O fenômeno das marés também é periódico, assim como a variação da temperatura diária que, neste caso, depende também da localização, pois próximo ao equador a variação quase não é notada. Enfim, a função exponencial, que também será apresentada no Capítulo 6, caracterizando movimentos que envolvem, por exemplo, crescimentos ou decrescimentos populacionais; bem como decaimento radioativo associado a substâncias que decaem com o passar do tempo. Vamos mostrar, através de um exemplo elucidativo, o que se entende por taxa de variação unitária de modo a relacioná-la com a exponencial e o conceito de proporcionalidade.

[1]Utiliza-se a letra I para intensidade e M para magnitude, apenas por notação corrente na literatura, porém ambas coincidem, isto é, $I = M$.

PROPRIEDADE 2.2.1. TAXA DE VARIAÇÃO UNITÁRIA

Seja $x \in \mathbb{R}$ e $a > 1$. Considere a expressão $f(x) = a^x$. a) Construir uma tabela para x variando, a partir do zero, de uma em uma unidade, contendo o valor de $f(x)$ e a taxa de variação unitária, isto é, o variar de uma unidade, denotada por $F(x) = f(x+1) - f(x)$ e b) mostre que a taxa de variação unitária é proporcional ao valor de $f(x)$.

a) A tabela a seguir denota, na primeira coluna, a quantidade, na segunda a exponencial e na terceira a taxa unitária, isto é, variando de uma unidade.

x	a^x	$F(x) = f(x+1) - f(x)$
0	1	$a^1 - a^0 = a^0 \cdot (a-1)$
1	a	$a^2 - a^1 = a^1 \cdot (a-1)$
2	a^2	$a^3 - a^2 = a^2 \cdot (a-1)$
3	a^3	$a^3 - a^2 = a^3 \cdot (a-1)$
4	a^4	$a^4 - a^3 = a^4 \cdot (a-1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

b) A partir da tabela concluímos que a taxa unitária $f(x+1) - f(x)$ é diretamente proporcional ao valor de $f(x)$, cuja constante de proporcionalidade é $(a-1)$. Note que, a partir do valor da constante de proporcionalidade, conclui-se imediatamente o porque devemos excluir $a = 1$, isto é, a base da exponencial não pode ser unitária. Ainda mais, ou é $a > 1$, caracterizando um crescimento, ou $0 < a < 1$, associada a um decrescimento, sendo que, no primeiro caso dizemos que cresce exponencialmente enquanto no segundo decresce exponencialmente.

Enfim, mencionamos o número e, base dos logaritmos naturais (neperianos). Como será apresentado no Capítulo 8, após o conceito de função, introduzido no Capítulo 6, $f(x) = e^x$ é a única função cuja derivada é ela mesma, bem como é a integral dela mesma, como será mostrado no Capítulo 9. Um clássico exemplo está associado à capitalização envolvendo juros compostos ao longo de um período.

EXEMPLO 2.6. SUBSTÂNCIA RADIOATIVA.

Considere uma substância radioativa tal que sua massa inicial é m_0, medida em gramas, e que a cada τ horas, é reduzida à metade. a) Expresse a variação da massa, isto é, como varia a massa com o tempo, em termos do tempo em horas. b) Mostre que independe da base.

a) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a > 1$ constantes, a a base e b associada à substância que decai. A massa pode ser escrita na forma

$$m(t) = m_0 \, a^{bt}. \tag{2.1}$$

Apenas para mencionar, essa expressão é solução de uma equação diferencial ordinária, tema esse que foge ao escopo do presente livro [16, 19]. O dado do problema afirma que, a cada τ horas, a massa é reduzida à metade, isto é temos $m(\tau) = m_0/2$. Substituindo na equação temos

$$\frac{m_0}{2} = m_0 \, a^{b\tau}.$$

Simplificando, reescrevendo na forma $a^b = (1/2)^{1/\tau}$ e substituindo na Eq.(2.1) podemos escrever

$$m(t) = m_0 \, 2^{-t/\tau}$$

que é a expressão desejada.

b) Da expressão obtida no item anterior, a conclusão é imediata, isto é, não depende da base.

Vamos apenas discutir o conceito de exponencial no sentido de operação inversa do logaritmo, pois voltaremos a esse tema quando da discussão das funções, conforme Capítulo 6, bem como na resolução de algumas equações envolvendo a incógnita no expoente ou mesmo no logaritmando.

DEFINIÇÃO 2.2.1. *Exponencial*

Sejam $1 \neq b > 0$ e $a \in \mathbb{R}_+$. Temos

$$a = b^x \qquad \Leftrightarrow \qquad \log_b a = x.$$

DEFINIÇÃO 2.2.2. *Equação exponencial*

Chama-se equação exponencial a equação que tem a incógnita no expoente.

EXEMPLO 2.7. *Exponencial com equação auxiliar*

Seja $x \in \mathbb{R}$. Resolva a equação $2^{x+2} + 2^{1-x} = 6$.

Note que a incógnita está no expoente, ou seja, é uma equação exponencial. Vamos introduzir uma variável auxiliar, t, definida por $2^x = t$. Segue, então, a equação, agora na incógnita t, já simplificando

$$2t^2 - 3t + 1 = 0$$

que é uma equação do segundo grau com raízes $t_1 = 1$ e $t_2 = 1/2$. Voltando na incógnita inicial, temos, neste caso, duas outras equações, a saber

$$2^x = 1 \qquad \text{e} \qquad 2^x = 1/2$$

com soluções, respectivamente, $x = 0$ e $x = -1$. Visto que não temos nenhuma restrição, exceto que as raízes são reais, $x = 0$ e $x = -1$ são as soluções da equação exponencial.

EXEMPLO 2.8. *Exponencial e logaritmos*

Seja $x \in \mathbb{R}$. Resolva a equação $2^{2x} + 50 = 15 \cdot 2^x$ a fim de mostrar que a diferença entre as raízes é um inteiro.

Em analogia ao anterior, introduzimos a incógnita auxiliar $2^x = t$ de onde segue a equação do segundo grau $t^2 - 15t + 50 = 0$ com raízes $t_1 = 10$ e $t_2 = 5$ o que nos leva às duas equações exponenciais

$$2^x = 10 \qquad \text{e} \qquad 2^x = 5.$$

Tomando o logaritmo na base dois obtemos

$$x_1 = 1 + \log_2 5 \qquad \text{e} \qquad x_2 = \log_2 5.$$

cuja diferença $x_1 - x_2 = 1 \in \mathbb{Z}$.

Concluímos o capítulo com a discussão do problema inicial, pois é um exemplo característico de exponencial. Discutimos a amortização de uma dívida, explicitando as taxas em casos de períodos (discretos) anual, mensal e diário, bem como o caso contínuo, o que nos leva à definição do número e, base dos logaritmos naturais.

EXEMPLO 2.9. *Aplicação financeira*

Comecemos, primeiramente, com a obtenção de uma expressão matemática que forneça o montante que é obtido para um tempo arbitrário, a partir de uma quantidade inicial corrigida de tempo em tempo (em geral, mês ou ano) a partir de uma taxa paga pela instituição financeira. Antes de construírmos uma tabela, é conveniente deixar claro que esse tipo de problema envolve o chamado juro sobre juro, isto é, está caracterizado o conceito de juro composto. Então, a partir do primeiro, digamos mês, o que será corrigido é como se fosse o primeiro, ou seja o inicial, e assim por diante. Vamos denotar por $M(\tau)$ e C, o montante (quantidade obtida após um período de tempo), e o capital (quantidade inicial que será aplicada), respectivamente. Sejam, ainda mais, t o tempo e i a taxa com a qual será corrigida a quantidade inicial, em cada um dos tempos, conforme tabela a seguir.

$$\begin{array}{ll}
\tau = 0 & M(0) = C \\
\tau = 1 & M(1) = M(0) + M(0)i = C(1+1) \\
\tau = 2 & M(2) = M(1) + M(1)i = M(1)(1+i) = C(1+i)^2 \\
\vdots & \qquad\qquad\vdots \\
\tau = t & M(t) := C\underbrace{(1+i)\cdot(1+i)\cdots(1+i)}_{t \text{ vezes}} = C(1+i)^t
\end{array}$$

Então, a expressão que fornece o montante, $M(t)$, obtida a partir de uma quantidade inicial, C, em regime de juro composto, num certo período de tempo, t, a uma taxa fixa, i (porcentagem), é dada por

$$M(t) = C\cdot(1+i)^t. \tag{2.2}$$

É a partir dessa expressão que vamos responder as duas perguntas propostas no início. A fim de isolarmos o valor de t devemos tomar o logaritmo, digamos na base e e utilizar as propriedades que, após rearranjarmos, fornece a expressão

$$t = \frac{\ln M - \ln C}{\ln(1+i)}$$

ou seja, o tempo necessário para que o montante seja M, obtido a partir de um C inicial a uma taxa i. Por outro lado, a segunda pergunta impõe, de imediato, uma condição, a saber: $M(t) = 2C$, qual é o valor de t a fim de que o montante seja o dobro da quantidade inicial. Denotando esse tempo por t_C e substituindo o valor de $M(t)$ na expressão anterior, obtemos

$$t_C = \frac{\ln 2}{\ln(1+i)}$$

que é o tempo necessário para dobrar a quantidade inicial a uma taxa i.

EXEMPLO 2.10. *Capitalização monetária*

No EM foi estudado o cálculo de juros simples, isto é, taxa fixa num tempo fixo, por exemplo, ano, mês e dia. Esse tipo de problema é dito discreto, pois o juro é computado por período. Admitamos que temos uma dívida, C, a ser paga após um ano, com juro sobre juro, conforme o EXEMPLO 2.9.

No caso em que temos o período mensal, isto é, num ano 12 meses, em cada um desses 12 intervalos a dívida é multiplicada por $(1+1/12)$ que fornece $(1+1/12)^{12} \simeq 2,61$, ao final de um ano. Por outro lado, se o período de um ano é dividido em dias, o fator multiplicativo passa a ser $(1+1/365)$ o que acarreta, ao final de um ano, multiplicar a dívida por $(1+1/365)^{365} \simeq 2,71$. Podemos continuar dividindo o período em, digamos, horas, minutos ou segundos, isto é, estamos a caminho da passagem do discreto para o contínuo, isto é, devemos tomar o limite

$$\lim_{T\to\infty}\left(1+\frac{1}{T}\right)^T$$

que nos leva ao número $e \simeq 2,71828$, como será mostrado no Capítulo 7. Em resumo, é como a tabela a seguir:

Período	Taxa	Dívida	Juro
ano	$(1+1)$	$2,000$	$100,0\%$
mês	$1+1/12$	$2,613$	$161,3\%$
dia	$1+1/365$	$2,714$	$171,4\%$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$T\to\infty$	$1+1/T$	$2,718$	$171,8\%$

Da tabela fica claro que ao passar do período, por exemplo, em dias (discreto) para o contínuo ($T\to\infty$), a diferença não é muito grande, contrariamente ao que ocorre, por exemplo, do anual para o mensal.

2.3 Exercícios

1. Seja $x \in \mathbb{R}_+^*$. Determine x para:

   a) $\log_3 x = 4$ b) $\log_2(x+1) = \frac{1}{2}$
   c) $\log_5 25 = x$ d) $\log_{81} 3 = x$
   e) $\log_x 16 = 2$ f) $\log_x 125 = 3$

2. Seja $x \in \mathbb{R}_+^*$. Determine x, se existir, para:

   a) $\log_{3x}(x+1) = 1$ b) $\log_x(2x^2-1) = 2$

3. Resolva as equações

   a) $\log_2(x+1)+\log_2(2x+2) = 7$ b) $\log_3(2x-1)+\log_3(3x+1) = 1+3\log_3 5$.

4. Sejam $a,b \in \mathbb{R}_+^*$, $\log_b a = x$ e $\log_a b = y$. Determine x e y, se existirem, a fim de que tenhamos $a = b^2$.

5. Sejam $\log_3 2 = a$ e $\log_{32} 81 = b$. Determine o produto $a\cdot b$.

6. Mostre que vale a relação
   $$\log_{\frac{1}{b}}(1/a) = \log_b a.$$
   desde que satisfeitas as condições de existência.

7. Define-se o cologaritmo, denotado por $\mathrm{colog}_b a$, isto é, o cologaritmo de a na base b, com $a > 0$ e $1 \neq b > 0$, como sendo $-\log_b a$. Sendo $\log_b a = x$ determine $\mathrm{colog}_a b$.

8. Simplifique as expressões

a) $\log_2 3 + \text{colog}_2 3$ b) $2 \cdot \log_3 5 + 3 \cdot \text{colog}_{81} 25$.

9. Sendo $\log_2 3 = \alpha$, determine x em

a) $x = \log_2 3 + \log_3 2 + \text{colog}_2 3$ b) $x = 2 \cdot \log_5 125 + \text{colog}_{125} 5 + \log_2 3$.

10. Determine x em

a) $9 = \dfrac{1}{81^x}$ b) $2^{\frac{x}{2}} = 2\sqrt{2}$.

11. Determine x em

a) $(2x)^2 = \dfrac{1}{64}$ b) $\left(\dfrac{x}{3}\right)^3 = 1$.

12. Determine x em

a) $2^x = 256$ b) $3^{2x} = \dfrac{1}{729}$.

13. Determine x em

a) $(3^x)^2 = 27$ b) $5^{3x} = \dfrac{1}{125}$.

14. Resolva as equações

a) $3^x + 3^{2x} = 12$ b) $2^{2x} - 2^x = 56$.

15. Resolva as equações para $x \in \mathbb{R}$

a) $2^x + 2^{2x} + 2^{3x} = 3$ b) $2^x - 2^{2x} + 2^{3x} = 1$.

16. Resolva as equações para $x \in \mathbb{R}$

a) $2^{3x} - 3 \cdot 2^{2x} + 3 \cdot 2^x = 1$ b) $5^{3x} - 3 \cdot 5^{2x} + 3 \cdot 5^x = 9$.

17. Resolva as equações

a) $7^{2x} + 7 = 8 \cdot 7^x$ b) $4^x + 16 = 10 \cdot 2^x$.

18. Resolva as equações para $x \in \mathbb{R}$

a) $2^{\frac{x}{2}} + 2^x = 6$ b) $5^x + 5^{2x} + 5^{3x} = \dfrac{31}{125}$.

19. Sejam $2^x = A$ e $3^x = B$. Determine, se existir, x em

a) $2 \cdot B = 3 \cdot A$ b) $3 \cdot A + 2 \cdot B = 5$.

20. Seja $x \in \mathbb{R}$. Resolva as equações

a) $2^x = 4 \cdot \log_2 x$ b) $3^x = 27 \cdot \log_{10}(x^2 + 1)$.

21. Sabendo que $\log_{10} 2 \simeq 0,3010$, quanto vale $\ln \sqrt[7]{8}$?

22. Sejam a_i com $i = 1, 2, \ldots, n$ números estritamente positivos. Mostre que: se esses números, nessa ordem, são termos de uma PG então os respectivos termos, obtidos tomando o seu logaritmo, são termos de uma PA.

23. Em analogia ao potencial hidrogeniônico, define-se pOH como o potencial hidroxiliônico de uma solução, isto é, a quantidade de hidróxidos $(OH-)$ que, de acordo com a teoria do equilíbrio iônico da água, apresentam concentrações de $H+$ e $OH-$ em um meio neutro, a 25°C, sempre 10^{-7} mol/L. Vale a relação $\mathrm{pOH} = -\log[OH-]$ de onde $\mathrm{pH} + \mathrm{pOH} = 14$. Com esses dados, um estudante de química analisou o seu próprio café da manhã e notou que apresentava uma quantidade de cátions hidrônio $[H+] = 10^{-4}$ mol/L. Determine qual é o valor do pOH da solução (café com leite)?

24. (Fuvest/2017) Um analgésico é aplicado via intravenosa. Sua concentração no sangue, até atingir a concentração nula, varia com o tempo de acordo com a seguinte relação:

$$c(t) = 400 - k \log_3(at + 1)$$

em que t é dado em horas e $c(t)$ é dado em mg/L. As constantes a e k são positivas. a) Qual a concentração do analgésico no instante inicial $t = 0$? b) Calcule as constantes a e k, sabendo que, no instante $t = 2$, a concentração do analgésico no sangue é metade da concentração no instante inicial e que, no instante $t = 8$, a concentração do analgésico no sangue é nula.

25. Determine x em

$$\text{a)} \quad \log_2[\log_2(\log_2 16)] = x \qquad \text{e} \qquad \text{b)} \quad \log_{10}[\log_2(\log_x 25)] = 0.$$

26. City tem taxa de crescimento populacional de 2% ao ano, aproximadamente. Em quantos anos a população de City dobrará, sabendo que a taxa de crescimento é constante?

27. Mostre que, para todo $x \geq 1$, tem-se

$$\ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}}\right) = 2\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

28. Consideremos $m(t)$ e m_0 a massa de uma substância radioativa no tempo t, contado em anos, e no instante inicial, respectivamente. Encontre o tempo de desintegração dessa substância radioativa, sendo

$$m(t) = m_0 e^{-\mu t}$$

onde μ é a taxa de redução da radioatividade.

29. Definimos o conceito de meia-vida de uma substância radioativa como: tempo necessário para que se desintegre a metade da massa de um corpo formado pela substância. Utilizando o Exercício 28 e denotando a meia-vida por τ, mostre que $\mu\tau = \ln 2$. Essa relação mostra que, se conhecemos o tempo de desintegração, a meia-vida fica determinada e vice-versa, se a meia-vida é conhecida, obtemos o tempo de desintegração.

30. O chamado método do carbono 14, C^{14}, é muito utilizado na datação, por exemplo, na determinação da idade de um fóssil. Sabendo que a meia vida do carbono 14 é 5570 anos e usando o Exercício 29, determine a constante de desintegração, μ.

31. (Olimpíadas Colombianas de Matemática/2010). Seja x um número real satisfazendo a equação $4^x - 4^{x-1} = 24$. Determinar o valor de $32^{\frac{1}{x}}$.

32. Determine x em $2(8^{x+1}+5) = 9(8^x+2)$.

33. Determine x em $\log\sqrt{6x+5} + \log\sqrt{2x+7} = 3\log 2$.

34. Seja $x \in \mathbb{R}$. Resolver as inequações exponenciais

$$\text{a)}\quad 2^{2x} > 1 \qquad\qquad \text{b)}\quad 2^{-x} < 4$$
$$\text{c)}\quad 2^{\frac{1}{2}} \leq (16)^x \qquad\qquad \text{d)}\quad 3^{(2-x)(x+2)} \geq 27$$

35. Seja $x \in \mathbb{R}$. Determine o conjunto solução para as seguintes inequações logarítmicas

$$\text{a)}\quad \log x > 2 - \log 2x \qquad \text{e} \qquad \text{b)}\quad \log_x(2x-1) > 2.$$

36. A fim de investir, visando o futuro, quanto devo disponibilizar, mensalmente, a taxa de 1% ao mês, continuamente, para, dentro de 15 anos, ser um milionário, isto é, obter um milhão de reais?

37. Seja x estritamente positivo. Utilize a identidade $\log_{10} x = \mathsf{K}\cdot\ln x$ a fim de obter a expressão para mudança de base, sendo K a constante que relaciona os logaritmos decimal e natural.

38. (Revista Ciência Hoje. Edição 311. Janeiro de 2014 (adaptado).) A logística do elemento molibdênio-99 é quase uma operação de guerra. Toda semana, aviões comerciais aterrissam em Campinas (SP) ou Guarulhos (SP) e trazem cargas blindadas do radioisótopo. São soluções líquidas, guardadas em compartimentos cilíndricos de, aproximadamente, 40 cm de altura. O material precisa ser rapidamente levado ao Ipen, em São Paulo (SP), onde é processado em um laboratório especial. O molibdênio-99 se transforma (decai) em tecnécio-99m, radioisótopo que é utilizado na medicina nuclear nos hospitais e clínicas de todo o Brasil. O problema é que, uma vez processada nos laboratórios do Ipen, essa solução de molibdênio-99 decai à metade de sua quantidade a cada 66 horas – se esse tempo for excedido, a substância perderá a eficácia. Determine a constante de desintegração.

39. Sendo $\log_{10} 11 \simeq 1{,}042$, qual dos dois números é maior 10^{11} ou 11^{10}?

40. Seja $x \in \mathbb{R}$ e $a \neq 1$ e positivo. Resolva a equação

$$a^x - 2a^{2x} + 1 = 0.$$

41. Seja $x > 0$. Resolva a equação

$$2\log_2 x - \log_{\frac{1}{2}} x + 9 = 0.$$

42. Sabendo que $\log_2 61 = \alpha$, determine $\log_2(1952)$.

43. Sabendo que $x \in \mathbb{R}$, resolva $\log_3(1+x) - \frac{1}{2}\log_3 x = \log_3 2$.

44. Resolva a inequação
$$\left(\frac{1}{81}\right)^{x+2} \leq 27.$$

45. Seja $x \in \mathbb{R}$. Resolva a inequação $\log_2(2-3x) \leq 5$.

46. Determinar o conjunto solução da inequação
$$3^x \geq \frac{1}{3^{2+3x}}.$$

47. (UFMA) Resolva a equação $2^{x-1} + 2^{x+3} + 2^{x-2} + 2^x = 2496$.

48. (UFSC) Sabendo que $\log a = 6\log b$, $2\log b = \log c$ e que $\log c = 45$, calcule o valor numérico de y na expressão $y = \log \sqrt[5]{\dfrac{a^3\,b^4}{c^2}}$.

49. (Fuvest/1996) Seja $f(x)$ o logaritmo de $2x$ na base $x^2 + 1/2$. a) Resolva $f(x) = 1/2$. b) Resolva a inequação $f(x) > 1$.

50. (Unicamp/96) Resolva o sistema
$$\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y &= 4 \\ xy &= 8 \end{cases}$$

51. (Vunesp/96) Sejam a e b números reais maiores que zero e tais que $ab = 1$. Se $a \neq 1$ e $\log_a x = \log_b y$, determine o valor de xy.

52. (ITA/94-Adaptado) Sejam x e y números reais, positivos e ambos diferentes de 1, satisfazendo o sistema: $x^y = 1/y^2$ e $\log x + \log y = \log(1/\sqrt{x})$. Mostre que $\{x, y\} \subset]0,4[$.

53. (FGV/94) Sendo $f(x) = e^{kx}$ e $f(2) = 5$ (e=número de Neper) a) calcule $f(6)$, b) prove que, para a e b reais $f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$.

54. (Fuvest/2014-Adaptado) Seja $x \in \mathbb{R}$. Determine as raízes da equação
$$(x+3)\,2^{x^2-9}\,\log_{10}|x^2+x-1| = 0\cdot$$

55. (Fuvest/2015-Adaptado) Dadas as sequências $a_n = n^2+4n+4$, $b_n = 2^{n^2}$, $c_n = a_{n+1} - a_n$ e $d_n = \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ definidas para valores inteiros positivos de n. a) Mostre que c_n é uma PA e b) Mostre que d_n é uma PG. Obtenha os respectivos termos gerais.

56. (Fuvest/2016-Adaptado) Utilize as propriedades dos logaritmos para simplificar
$$S = \frac{1}{2\cdot\log_2 2016} + \frac{1}{5\cdot\log_3 2016} + \frac{1}{10\cdot\log_7 2016}.$$

57. (Fuvest/2017-Adaptado) Considere as funções: $f(x) = x^2 + 4$ e $g(x) = 1 + \log_{1/2} x$. O domínio de f é o conjunto dos números reais e o domínio de g é o conjunto dos números reais maiores que zero. Seja a função $h(x) = 3f(g(x)) + 2g(f(x))$ em que $x > 0$. Calcule $h(2)$.

58. (Fuvest/2017-Adaptado) Uma quantidade fixa de um gás ideal é mantida a uma temperatura constante, e seu volume varia com o tempo de acordo com a seguinte fórmula $V(t) = \log_2(5 + 2\,\mathrm{sen}(\pi t))$ para $0 \leq t \leq 2$ em que o tempo é medido em horas e $V(t)$ é medido em metros cúbicos. Determinar o instante de tempo, no intervalo de tempo $[0,2]$, em que a pressão do gás é máxima.

59. (Fuvest/2018-Adaptado) O ano de 2017 marca o trigésimo aniversário de um grave acidente de contaminação radioativa, ocorrido em Goiânia em 1987. Na ocasião, uma fonte radioativa, utilizada em um equipamento de radioterapia, foi retirada do prédio abandonado de um hospital e, posteriormente, aberta no ferro-velho para onde fora levada. O brilho azulado do pó de césio-137 fascinou o dono do ferro-velho, que compartilhou porções do material altamente radioativo com sua família e amigos, o que teve consequências trágicas. O tempo necessário para que metade da quantidade de césio-137 existente em uma fonte se transforme no elemento não radioativo bário-137 é trinta anos. Em relação a 1987, determine, aproximadamente, a fração de césio-137, em %, que existirá na fonte radioativa 120 anos após o acidente.

60. (Fuvest/2018-Adaptado) Maria quer comprar uma TV que está sendo vendida por R$ 1.500,00 à vista ou em 3 parcelas mensais sem juros de R$ 500,00. O dinheiro que Maria reservou para essa compra não é suficiente para pagar à vista, mas descobriu que o banco oferece uma aplicação financeira que rende 1% ao mês. Após fazer os cálculos, Maria concluiu que, se pagar a primeira parcela e, no mesmo dia, aplicar a quantia restante, conseguirá pagar as duas parcelas que faltam sem ter que colocar nem tirar um centavo sequer. Quanto Maria reservou para essa compra, em reais?

2.3.1 Respostas e/ou sugestões

1. a) 81; b) $\sqrt{2} - 1$; c) 2; d) $1/4$; e) 4; f) 5.

2. a) $1/2$; b) $\nexists x$ que satisfaça a equação.

3. a) 7; b) 8.

4. $x = 2$ e $y = 1/2$.

5. $4/5$.

6. Escreva $\log_{\frac{1}{b}}(1/a) = \log_{b^{-1}} a^{-1} = \log_b a$.

7. $-1/x$.

8. a) 0; b) $\log_3 \sqrt{5}$.

9. a) $1/\alpha$; b) $\alpha + 17/3$.

10. a) $-1/2$; b) 3.

11. a) $1/16$; b) 3.

12. a) 8; b) -3.

13. a) $3/2$; b) -1.

14. a) 1; b) 3.

15. a) 0; b) 0.

16. a) 0; b) $\log_5 3$.

17. a) 0 e 1; b) 1 e 2.

18. a) 2; b) -1.

19. a) $x = 1$; b) $x = 0$.

20. a) 2; b) 3.

21. $0,297$.

22. Direto das definições de PA e PG, mostrando que a razão da PA é $\ln q$ sendo q a razão da PG.

23. $\mathsf{pOH} = 10$

24. a) $c(0) = 400\,mg/L$; b) $a = 4$ e $k = 100$.

25. a) $x = 1$ e b) $x = 5$.

26. 35 anos.

27. Multiplicar numerador e denominador pelo conjugado do denominador.

28. $t = \dfrac{1}{\mu}[\ln m_0 - \ln m(t)]$

29. Imponha que $m(\tau) = m_0/2$.

30. $\mu = 1244 \cdot 10^{-7}$

31. $x = 4$.

32. $x = 1 - \frac{1}{3}\log_2 7$.

33. $x = 1/2$.

34. a) $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$; b) $\{x \in \mathbb{R} : x > -2\}$; c) $\left\{x \in \mathbb{R} : x \geq \frac{1}{8}\right\}$; d) $\{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 1\}$.

35. a) $\{x \in \mathbb{R} : x > 5\sqrt{2}\}$; b) $\left\{x \in :\frac{1}{2} < x < 1\right\}$

36. Aproximadamente R\$4.800,00 ao mês.

37. Tome o logaritmo na base dez de modo a obter $-1/\ln 10$.

38. $\tau = \ln 2/66 \simeq 0,0105$.

39. $10^{11} > 11^{10}$.

40. $x = 0$.

41. $x = 1/8$.

42. $5 + \alpha$.

43. $x = 1$.

44. $\{x \in \mathbb{R} : x \geq -11/4\}$.

45. $\{x \in \mathbb{R} : -10 \leq x < 2/3\}$.

46. $\{x \in \mathbb{R} : x \geq -1/2\}$.

47. $x = 8$.

48. 81.

49. a) $\{\sqrt{6}/6\}$; b) $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1 - \sqrt{2}/2$ ou $\sqrt{2}/2 < x < 1 + \sqrt{2}/2\}$.

50. $\{(32, 1/4)\}$.

51. 1.

52. Obtenha $x = 1/3^{\frac{2}{3}}$ e $y = 3$ pertencem ao conjunto.

53. a) 125; b) Utilize as propriedades das potências.

54. $\{-3, -2, -1, 0, 1\}$.

55. a) Direto da definição de PA (termo geral $c_n = 2n + 5$) e b) Direto da definição de PG (termo geral $d_n = 2^{2n+1}$).

56. $0, 1$.

57. 8.

58. Note que se a pressão é máxima, o volume deve ser mínimo, pois a temperatura é constante. Obtenha $t = 1,5\,\text{h}$.

59. $6,3\%$.

60. Escreva a equação
$$[(x - 500) \cdot 1.01 - 500] \cdot 1.01 = 500$$
de modo a obter $x = 1.485,20$.

Capítulo 3

Trigonometria

Como motivação, visando os três últimos capítulos, vamos mostrar que o limite dos quocientes $\operatorname{sen} x \div x$ e $x \div \operatorname{sen} x$, para x tão pequeno quanto se queira, isto é, se aproximando de zero, é igual à unidade.

A trigonometria estuda relações entre comprimentos de lados de um triângulo, em princípio retângulo, onde são definidos $\operatorname{sen}\theta$ (seno de téta) e $\cos\theta$ (cosseno de téta), sendo θ (téta) um ângulo interno do triângulo, e se estende, além do triângulo retângulo, para triângulos acutângulos e obtusângulos. Esse ramo da matemática, desempenha papel central em problemas onde a periodicidade se faz presente, por exemplo, no estudo das chamadas séries de Fourier.

3.1 Trigonometria no triângulo retângulo

Aqui, antes de introduzirmos o círculo trigonométrico a fim de apresentar os conceitos envolvendo linhas trigonométricas, vamos apresentar os conceitos das linhas trigonométricas seno, cosseno e tangente, através do triângulo retângulo. A fim de atingir nosso objetivo, primeiramente é conveniente introduzir a notação que será utilizada neste capítulo.

3.1.1 Notação

Utilizamos a seguinte notação: ângulos internos de um triângulo serão denotados por α, β e γ, os respectivos vértices por A, B e C e os lados por a, b e c. Ainda mais, o lado a é oposto ao vértice A, o lado b é oposto ao vértice B e o lado c é oposto ao vértice C. Aqui, usamos a seguinte nomenclatura, arco de medida $m(\widehat{AOB}) = \theta$ radianos que, por abuso de linguagem, dizemos ângulo de θ radianos, entendendo que o θ é o ângulo formado pelos dois segmentos de reta $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$, com a mesma origem O, que determinam o arco $\widehat{AOB}$. Somente o arco, vamos denotar por $\widehat{AB}$.

3.1.2 Triângulo retângulo

Vamos considerar um triângulo retângulo em C, conforme Figura 3.1. A fim de que não pairem dúvidas, estamos denotando seno do arco de medida α (β) radianos como sendo seno do ângulo α (β), o que vale, também, para as outras linhas trigonométricas, cosseno e tangente.

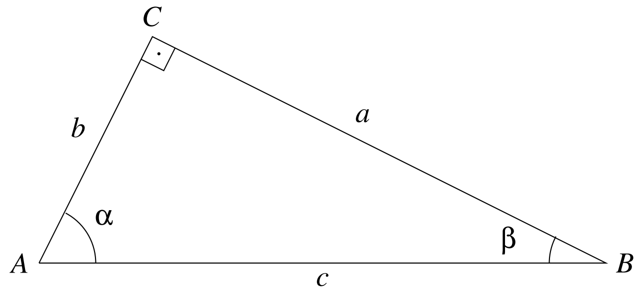


Figura 3.1: Triângulo retângulo em C.

DEFINIÇÃO 3.1.1. SENO DOS ÂNGULOS α E β

Chama-se seno do ângulo α (β), denotado por $\operatorname{sen}\alpha$ $(\operatorname{sen}\beta)$ o quociente do cateto oposto a (b) pela hipotenusa c

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{c} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}\beta = \frac{b}{c}\cdot \tag{3.1}$$

Dessa definição é imediato se assegurar que esse quociente é sempre menor que a unidade, pois a hipotenusa é sempre maior que qualquer um dos catetos. Esse fato será ratificado quando apresentarmos o círculo trigonométrico cujo raio é unitário, isto é, no máximo, o $\operatorname{sen}\alpha$ $(\operatorname{sen}\beta)$ é igual a unidade. Em analogia à linha trigonométrica seno, apresentamos a definição da linha trigonométrica cosseno para, depois, abordar a linha trigonométrica tangente, seja pela definição que pela relação entre as duas anteriores.

DEFINIÇÃO 3.1.2. COSSENO DOS ÂNGULOS α E β

Chama-se cosseno do ângulo α (β), denotado por $\cos\alpha$ $(\cos\beta)$ o quociente do cateto adjacente b (a) pela hipotenusa c

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \text{e} \qquad \cos\beta = \frac{a}{c}\cdot \tag{3.2}$$

Aqui também, é imediato se assegurar que esse quociente é sempre menor que a unidade, pois a hipotenusa é sempre maior que qualquer um dos catetos. Esse fato será ratificado quando apresentarmos o círculo trigonométrico cujo raio é unitário, isto é, no máximo, o $\cos\alpha$ $(\cos\beta)$ é igual a unidade.

DEFINIÇÃO 3.1.3. TANGENTE DOS ÂNGULOS α E β

Chama-se tangente do ângulo α (β), denotado por $\tan\alpha$ $(\tan\beta)$ o quociente do cateto oposto a (b) pelo cateto adjacente b (a)

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \qquad \text{e} \qquad \tan\beta = \frac{b}{a}\cdot \tag{3.3}$$

Contrariamente às definições de seno e cosseno, neste caso, não podemos garantir que os quocientes serão menores que a unidade, pois podem ser, inclusive, tão grandes quanto se queira, em particular não estarem definidos.

Efetuando, formalmente, o quociente das Eq.(3.1) e Eq.(3.2) podemos verificar que obtemos exatamente as Eq.(3.3) de onde podemos concluir a seguinte relação trigonométrica

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

onde θ (pode ser α ou β) deve ser diferente de um múltiplo inteiro de $\pi/2$, visto que o denominador deve ser diferente de zero. Nesse caso, para $\theta = \pi/2$ ou um seu múltiplo inteiro, dizemos que a tangente não está definida.

Antes de passarmos aos exemplos, recordemos que em um triângulo retângulo vale o teorema de Pitágoras, conforme Figura 3.1, $c^2 = a^2 + b^2$. Então, utilizando as Eq.(3.1) e Eq.(3.2) e esse teorema obtemos, após simplificação,

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \tag{3.4}$$

onde θ pode ser α ou β, a chamada relação fundamental da trigonometria.

Antes de introduzirmos as linhas trigonométricas, através do círculo trigonométrico, é conveniente apresentar alguns conceitos de modo a concluir com as definições de vetores, de versores e de projeções ortogonais, de ponto e de vetor, num eixo.

DEFINIÇÃO 3.1.4. RETA ORIENTADA

Chama-se reta orientada a toda reta cujo sentido positivo de percurso é fixado. O sentido de percurso contrário ao fixado é chamado sentido negativo.

Ao indicarmos o sentido positivo de uma reta, o segmento (de reta) orientado, denotado por $\overline{AB}$, tem origem em A e extremidade em B. Por outro lado, o segmento orientado $\overline{BA}$, tem origem em B e extremidade em A, sentido negativo relativo à reta. Ver Figura 3.2a. O sentido $\overline{AB}$ é positivo ou negativo se coincide ou não com o sentido do eixo $x'x$, chamado suporte do segmento. Ao fixarmos uma origem, O, e dotarmos a reta de uma unidade de medida, u, temos o que chamamos de eixo, Figura 3.2b.

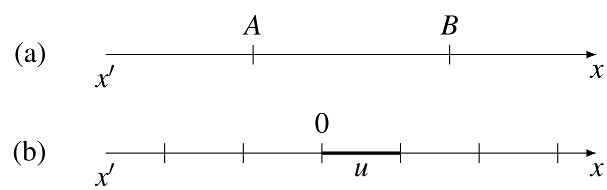


Figura 3.2: (a) Segmento de reta orientado e (b) eixo $x'x$.

Conforme Figura 3.2a, os segmentos orientados $\overline{AB}$ e $\overline{BA}$ têm sentidos contrários, o mesmo valor absoluto (também chamado módulo), denotado por $|AB|$ e medidas algébricas, denotadas por $m(\cdot)$, simétricas $m(AB) = -m(BA)$.

DEFINIÇÃO 3.1.5. SEGMENTOS EQUIPOLENTES

Dois segmentos de reta orientados são chamados equipolentes (equipotentes, equivalentes) quando diferem apenas por uma translação.

DEFINIÇÃO 3.1.6. VETOR

Todos os segmentos equipolentes de um segmento orientado $\overline{AB}$ (origem em A e extremidade em B), correspondem a um determinado vetor, denotado por $\overrightarrow{AB}$ ou $B-A$.

São três os elementos que caracterizam um vetor. Módulo do segmento orientado; sentido do segmento orientado e direção da reta suporte do segmento orientado.

DEFINIÇÃO 3.1.7. VERSOR

Chama-se versor a todo vetor de módulo unitário.

Para concluírmos esta seção, vamos introduzir os conceitos de projeções ortogonais, em particular, de um ponto e de um vetor sobre um eixo.

DEFINIÇÃO 3.1.8. PONTO SOBRE EIXO

Chama-se projeção ortogonal de um ponto, A, sobre um eixo, $x'x$, o pé da perpendicular, P, baixada do ponto A sobre o eixo $x'x$.

DEFINIÇÃO 3.1.9. VETOR SOBRE EIXO

Chama-se projeção ortogonal de um vetor, $\overrightarrow{AB}$, sobre um eixo, $x'x$, a um outro vetor, $\overrightarrow{PQ}$, cujas origem, P e extremidade, Q, são, respectivamente, as projeções ortogonais das origem, A e extremidade, B, do vetor $\overrightarrow{AB}$, conforme Figura 3.3.

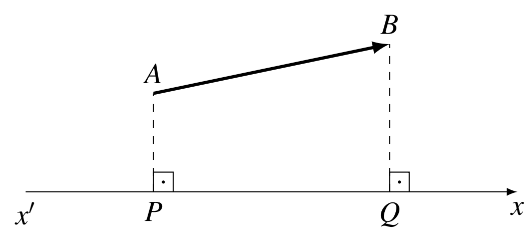


Figura 3.3: Projeções ortogonais. Ponto e vetor no eixo.

Note que $P(Q)$ é o pé da perpendicular baixada do ponto A (B) sobre o eixo $x'x$. Ainda mais, se o vetor $\overrightarrow{AB}$ é perpendicular ao eixo $x'x$, sua projeção é nula.

3.2 Trigonometrica no círculo trigonométrico

Aqui, de modo a introduzir as linhas trigonométricas a partir do círculo trigonométrico, começamos com o conceito de arco de circunferência o qual será estendido de modo a comportar uma orientação e admitir medidas maiores que o comprimento da circunferência, a fim de caracterizarmos a circunferência (círculo) trigonométrica(o).

DEFINIÇÃO 3.2.1. ARCO DE CIRCUNFERÊNCIA E SETOR CIRCULAR

Chama-se arco de circunferência, denotado por $\widehat{AB}$, a porção compreendida por dois pontos da circunferência, A e B, chamados extremos e setor circular a porção delimitada pelos lados $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ e o arco $\widehat{AB}$. Ver Figura 3.4.

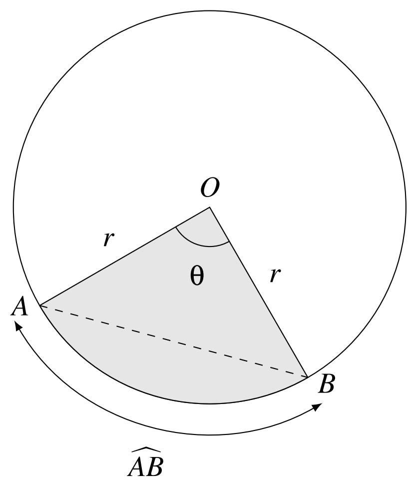


Figura 3.4: Arco de circunferência.

DEFINIÇÃO 3.2.2. CORDA

O segmento $\overline{AB}$, com A e B extremos de um arco, é chamado corda. Arcos que têm a mesma corda são arcos replementares.

A fim de generalizar o conceito de arco de circunferência, vamos pemitir que o arco possa ser orientado bem como possamos considerar arcos com medida maior que 2π radianos. Em relação à orientação, convencionamos como sentido positivo aquele contrário ao movimento dos ponteiros de um relógio, enquanto o sentido negativo é o considerado como no sentido de se deslocar os ponteiros do relógio. Ainda mais, como estamos considerando a possibilidade de arcos com medida algébrica (medida do arco precedida do sinal de $+$ ou de $-$) maior que 2π radianos, podemos ter arcos se sobrepondo, os chamados arcos côngruos. Em resumo, dessa generalização concluímos que temos um número infinito de arcos com mesma origem e mesma extremidade, porém com medidas algébricas distintas. Assim, dizemos que um arco orientado admite infinitas determinações e que as várias determinações de um mesmo arco orientado são arcos côngruos. Convém ressaltar que vale a mesma generalização para a noção de ângulo o que nos leva a definir a medida algébrica de um ângulo orientado.

DEFINIÇÃO 3.2.3. DETERMINAÇÕES DE UM ÂNGULO ORIENTADO

Seja x a medida algébrica de um ângulo, α, tal que $0 \leq \alpha < 2\pi$, a menor determinação de x e $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ Vale a seguinte relação

$$x = \alpha + 2k\pi.$$

Vamos, a partir de agora, introduzir o conceito de círculo trigonométrico, conforme Figura 3.5 na qual, antes mesmo de definir, mencionamos as linhas trigonométricas associadas aos eixos coordenados. Consideremos a origem, O, do sistema de eixos, horizontal, denotado por $x'x$, associado ao eixo da linha trigonométrica chamada cosseno e vertical, denotado por $y'y$, associado ao eixo da linha trigonométrica chamada seno. Esse sistema de eixos define os chamados quadrantes, num total de quatro, contados a partir da origem dos arcos, A, e orientados no sentido positivo, denotados por I Q, II Q, III Q e IV Q.

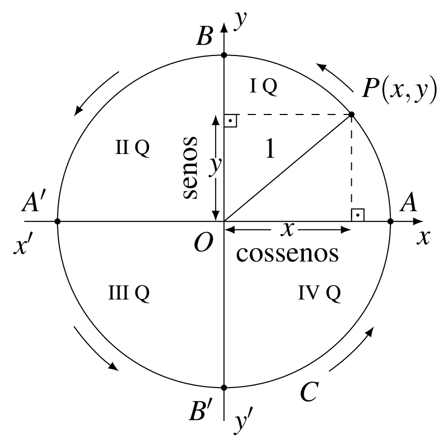


Figura 3.5: Círculo trigonométrico.

DEFINIÇÃO 3.2.4. CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

Todo círculo orientado cujo raio é igual à unidade de medida, em particular, unitário, é chamado círculo trigonométrico.

Denotamos por C a circunferência trigonométrica, conforme Figura 3.5, de onde segue, então

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}.$$

Ainda mais, é imediato se certificar que todo ponto $(x,y) \in C$, isto é, pertencente à circunferência, tem as desigualdades $-1 \leq x \leq +1$ e $-1 \leq y \leq +1$ satisfeitas. E, como vamos mostrar a seguir, essas desigualdades são satisfeitas pelas linhas trigonométricas seno e cosseno, isto é, são limitadas inferior e superiormente. Enfim, da Definição 3.2.4 um ângulo de lados $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$, isto é, de origem A e extremidade B mede um radiano se, e somente se, o arco $\widehat{AB}$ da circunferência C, por ele subentendido, tem comprimento unitário, ou seja, o raio da circunferência trigonométrica. Em geral, a medida, em radianos, de um ângulo central é igual a ℓ/r, onde r é o raio da circunferência e ℓ é o comprimento do respectivo arco.

DEFINIÇÃO 3.2.5. SENO DE UM ARCO

Chama-se seno de um arco $\widehat{AP} = \theta$, de origem A e extremidade P, a medida algébrica do vetor $\overrightarrow{OQ}$, projeção do vetor $\overrightarrow{OP}$ sobre eixo $y'y$, com notação $\operatorname{sen}\theta$. Ver Figura 3.6.

Da Figura 3.6 podemos observar que o seno de arcos nos dois primeiros quadrantes é positivo, enquanto nos dois últimos é negativo; é limitado, isto é, o seno de um arco, $\operatorname{sen}\theta$, satisfaz a dupla desigualdade $-1 \leq \operatorname{sen}\theta \leq +1$ e arcos côngruos têm o mesmo seno.

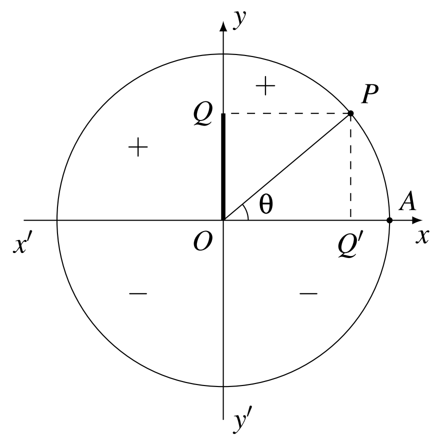


Figura 3.6: Seno de um arco θ denotado por $\operatorname{sen}\theta$.

DEFINIÇÃO 3.2.6. COSSENO DE UM ARCO

Chama-se cosseno de um arco $\widehat{AP} = \theta$, de origem A e extremidade P, a medida algébrica do vetor $\overrightarrow{OQ'}$, projeção do vetor $\overrightarrow{OP}$ sobre eixo $x'x$, com notação $\cos\theta$.

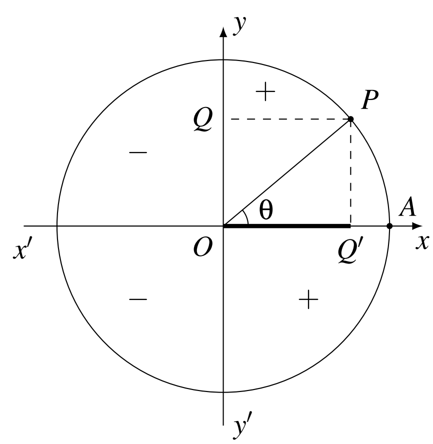


Figura 3.7: Cosseno de um arco θ denotado por $\cos\theta$.

Da Figura 3.7 podemos observar que o cosseno de arcos no primeiro e no quarto quadrantes é positivo, enquanto no segundo e terceiro quadrantes é negativo; é limitado, isto é, o cosseno de um arco, $\cos\theta$, satisfaz a dupla desigualdade $-1 \leq \cos\theta \leq +1$ e arcos côngruos têm o mesmo cosseno.

EXEMPLO 3.1. CALCULAR $\operatorname{sen}(\pi/4)$

Visto que $\pi/4$ é à metade de $\pi/2$, isto é, está na bissetriz dos quadrantes ímpares, temos que $\operatorname{sen}\theta = \cos\theta$. Utilizando a relação fundamental da trigonometria Eq.(3.4), podemos escrever

$$\operatorname{sen}^2\pi/4 + \operatorname{sen}^2\pi/4 = 1$$

de onde segue, $\operatorname{sen}\pi/4 = \pm\sqrt{2}/2$. Como o arco encontra-se no primeiro quadrante, vale apenas o sinal positivo, logo $\operatorname{sen}\pi/4 = \sqrt{2}/2$ que é, também, o valor do seno de todos os arcos tais que $\pi/4 + 2k\pi$ com $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$, ou seja, arcos côngruos.

EXEMPLO 3.2. CALCULAR $\cos(\pi/6)$

Consideremos um triângulo retângulo $\widehat{ABC}$, conforme Figura 3.8, cuja hipotenusa é igual a um e os ângulos internos medindo $\pi/3$ rad e $\pi/6$ rad.

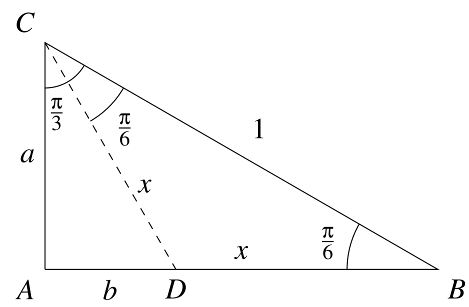


Figura 3.8: Triângulo retângulo de ângulos internos $\pi/3$ rad e $\pi/6$ rad.

Começamos por traçar a bissetriz do ângulo $\widehat{C}$ que intercepta o lado $\overline{AB}$ no ponto D, bem como denotamos $\overline{CD} = \overline{BD} = x$, $\overline{AC} = a$ e $\overline{AD} = b$. Por semelhança de triângulos $\widehat{ADC} \simeq \widehat{ACB}$ podemos escrever

$$\frac{a}{b+x} = \frac{b}{a} = \frac{x}{1} \tag{3.5}$$

de onde obtemos $b = ax$ e $x^2 + bx - a = 0$. Utilizando a lei dos cossenos, conforme Exercício 31, no triângulo $\widehat{DBC}$ obtemos

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2x}. \tag{3.6}$$

A partir das Eq.(3.5) temos

$$a = \frac{x^2}{1-x^2} \qquad \text{e} \qquad b = \frac{x^3}{1-x^2}$$

que, por meio do teorema de Pitágoras no triângulo $\widehat{ABC}$, fornece a equação quadrática

$$\frac{x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{x^4}{(1-x^2)^2} = 1$$

com soluções $x = \pm\sqrt{3}/3$ que, descartando o sinal negativo e substituindo na Eq.(3.6) fornece

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{3}/3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

que é o resultado desejado.

Desse resultado concluímos que $\operatorname{sen}(\pi/3) = \sqrt{3}/2$, bem como da relação fundamental que

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

Enfim, visto que arcos côngruos têm o mesmo seno e o mesmo cosseno, obtemos

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)=\frac{1}{2}$$

com $k=\pm 1,\pm 2,\dots$

Ressaltamos que, além das linhas trigonométricas seno e cosseno, existem outras quatro que são definidas a partir dessas duas. Aqui, neste capítulo, vamos apenas mencionar as respectivas definições, pois no Capítulo 6, quando vamos estudar essas funções, vamos voltar nesse tema. As quatro linhas trigonométricas que vamos mencionar estão relacionadas com o inverso do seno, resultando na cossecante, denotada por $\operatorname{cosec}\theta$; com o inverso do cosseno, resultando na secante, com notação $\sec\theta$; com o quociente do seno pelo cosseno, resultando na tangente, como já apresentada na DEFINIÇÃO 3.1.3 e com o quociente do cosseno pelo seno, ou inverso da tangente, resultando na cotangente, com notação $\cot\theta$, desde que definidas, isto é,

$$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}\qquad \text{e}\qquad \tan\theta=\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

de modo que $\theta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ com $k=0,\pm 1,\pm 2,\dots$

$$\operatorname{cosec}\theta=\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\qquad \text{e}\qquad \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

de modo que $\theta\neq k\pi$ com $k=0,\pm 1,\pm 2,\dots$ Ainda mais, mencionamos, também as relações quadráticas, com as respectivas restrições para o arco θ, a saber

$$\sec^2\theta=1+\tan^2\theta\qquad \text{e}\qquad \operatorname{cosec}^2\theta=1+\cot^2\theta\cdot$$

Antes de passarmos a apresentar exemplos é conveniente ressaltar que para todas as linhas trigonométricas sendo medidas algébricas de vetores, caracterizam números relativos, isto é, acompanhadas de sinal. Ainda mais, seno, cosseno, secante e cossecante têm período 2π radianos, ou seja, um arco, θ, adicionado de um múltiplo inteiro de 2π, tem o mesmo valor do arco θ, enquanto para as linhas trigonométricas tangente e cotangente o período é π radianos.

EXEMPLO 3.3. EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO

Considere $x\in\mathbb{R}$ com $x\neq -2$. Determine o valor de x que satisfaça, simultaneamente, as igualdades $\operatorname{sen}\theta=\dfrac{2x+6}{13}$ e $\sec\theta=\dfrac{13}{x+2}$. Utilizando a expressão que fornece o cosseno em termos da secante e usando a relação fundamental da trigonometria, podemos escrever

$$\left(\frac{2x+6}{13}\right)^2+\left(\frac{x+2}{13}\right)^2=1$$

de onde, simplificando, decorre a equação algébrica $5x^2+28x-129=0$ com soluções dadas por $x_1=3$ e $x_2=-43/5$. Visto que nenhuma delas é igual a -2, ambas servem, isto é, as igualdades são satisfeitas para qualquer um dos valores de x.

EXEMPLO 3.4. REDUÇÃO AO PRIMEIRO QUADRANTE

Considere $\tan(73\pi/4)$. Reduza ao primeiro quadrante e calcule o seu valor. Podemos escrever o arco $73\pi/4$ de modo que $18\pi + \pi/4 = \pi/4 + 9 \cdot 2\pi$. Assim, temos um arco côngruo do arco $\pi/4$ radianos, pois a partir dele, demos 9 voltas completas de modo a chegar no mesmo lugar. Visto que arcos côngruos têm a mesma tangente, podemos escrever

$$\tan\left(\frac{73\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4} + 9 \cdot 2\pi\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Por outro lado, conforme EXEMPLO 3.1, temos $\operatorname{sen}(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, de onde segue $\tan \pi/4 = 1$, logo $\tan(73\pi/4) = 1$.

Antes de passarmos a apresentar os conceitos de arco duplo e arco metade, vamos concluir essa seção mostrando um resultado associado às linhas trigonométricas de arcos expressos pela relação π/n que é a medida da corda do seu arco duplo $2\pi/n$, sendo n o número de lados de um polígono regular inscrito num círculo.

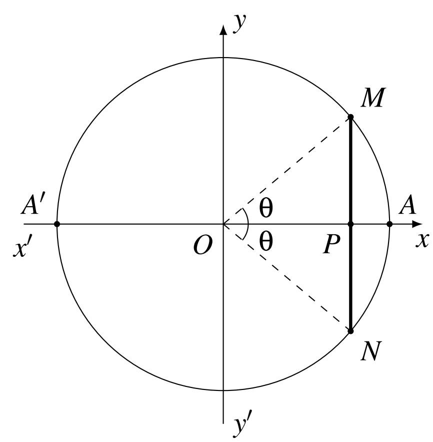


Figura 3.9: Linhas trigonométricas de arcos da forma π/n.

Considere a Figura 3.9 contendo um círculo trigonométrico, onde a corda $\overline{MN}$ é perpendicular ao diâmetro $\overline{AA'}$. Então, como todo diâmetro perpendicular a uma corda divide essa corda na metade, vale a igualdade $\overline{MP} = \overline{PN}$. Da definição de seno, podemos escrever $\operatorname{sen}\theta = \overline{MP} = \overline{MN}/2$, sendo $\overline{MN}$ a corda que subentende o arco duplo 2θ. Sabendo que a corda do arco duplo $2\pi/n$ corresponde ao lado, ℓ_n, do polígono regular de $n = 3, 4, \ldots$ lados, obtemos

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{1}{2}\ell_n.$$

Dessa expressão e das relações envolvendo as seis linhas trigonométricas é possível calcular as demais, isto é, as outras cinco linhas trigonométricas podem ser expressas em termos do seno do arco.

EXEMPLO 3.5. HEXÁGONO REGULAR

Sabendo que o lado do hexágono regular inscrito no círculo trigonométrico é igual ao raio do círculo, mostre que $\operatorname{sen}(\pi/6) = 1/2$.

Da expressão anterior temos que o número de lados é $n = 6$, logo $\ell_6 = 1$, de onde segue que $\operatorname{sen}(\pi/6) = 1/2$. Se quisermos as demais linhas trigonométricas, basta utilizar as relações entre elas, isto é, todas as demais podem ser expressas em ternos do $\operatorname{sen}(\pi/6)$.

3.2.1 Adição de arcos

Estudar as linhas trigonométricas de uma adição ou subtração de dois arcos consiste em obter expressões, em geral, para todas as linhas trigonométricas, que são dadas em termos das linhas trigonométricas dos arcos em separado. Em resumo, sejam dois arcos A e B cujas linhas trigonométricas são conhecidas e desejamos determinar as linhas trigonométricas envolvendo uma soma ou uma subtração $A \pm B$. Como já ressaltamos, basta conhecer uma linha trigonométrica que as demais estão determinadas. Aqui, vamos mostrar, apenas a expressão envolvendo os senos, em particular, o seno da diferença de dois arcos, enquanto as outras serão deixadas a cargo do leitor.

TEOREMA 3.2.1. SENO DA DIFERENÇA DE DOIS ARCOS

Sejam θ_1 e θ_2 dois arcos tais que, sem perda de generalidade, $0 < \theta_1 < \theta_2 < \pi/2$. Arcos que se encontram em outros quadrantes são tratados de maneira semelhante, isto é, reduzimos o arco ao primeiro quadrante e procedemos como a seguir. Mostrar que

$$\operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1) = \operatorname{sen}\theta_2 \cos\theta_1 - \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2.$$

DEMONSTRAÇÃO. Vamos mostrar esse resultado através da comparação de áreas de triângulos e trapézios. Para tanto, consideramos a Figura 3.10, um círculo trigonométrico (raio unitário) sendo as projeções no eixo $x'x$ relativas aos cossenos e as projeções no eixo $y'y$ relativas aos senos.

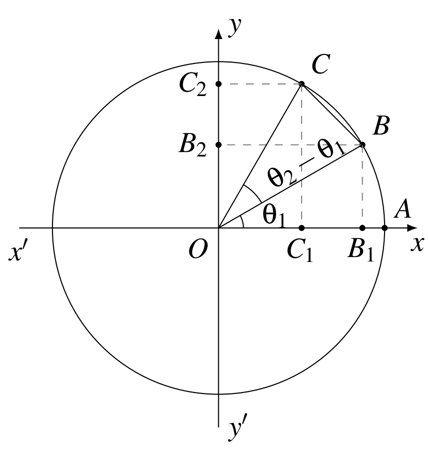


Figura 3.10: Expressão para o seno da diferença de dois arcos.

Denotemos por A_t a área de triângulos e A_T a área do trapézio. Da Figura 3.10 podemos escrever a seguinte identidade

$$A_t(OBC)+A_t(OB_1B)=A_t(OC_1C)+A_T(CC_1B_1B).$$

Conhecidas as áreas dos triângulos e do trapézio, obtemos, a partir da identidade anterior

$$\frac{\overline{OB}\cdot\overline{OC}}{2}\,\mathrm{sen}((\theta_2-\theta_1)+\frac{\overline{OB_1}\cdot\overline{B_1B}}{2}=\frac{\overline{OC_1}\cdot\overline{OC_2}}{2}+\frac{\overline{CC_1}+\overline{BB_1}}{2}\cdot\overline{B_1C_1}$$

na qual, agora, introduzimos o seno e o cosseno dos arcos θ_1 e θ_2, de modo a obter, já simplificando o 2 dos denominadores

$$1\cdot 1\,\mathrm{sen}(\theta_2-\theta_1)+\cos\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_1=\cos\theta_2\,\mathrm{sen}\,\theta_2+(\mathrm{sen}\,\theta_2+\mathrm{sen}\,\theta_1)\cdot(\cos\theta_1-\cos\theta_2).$$

Utilizando a propriedade distributiva e simplificando obtemos

$$\mathrm{sen}(\theta_2-\theta_1)=\mathrm{sen}\,\theta_2\cos\theta_1-\mathrm{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 \tag{3.7}$$

que é o resultado desejado.

EXEMPLO 3.6. CALCULAR O $\mathrm{sen}(\pi/12)$

Da Eq.(3.7) escrevemos $\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}$ de modo que $\theta_2=\pi/4$ radianos e $\theta_1=\pi/6$ radianos. Visto que são conhecidos os valores de $\mathrm{sen}(\pi/4)=\sqrt{2}/2=\cos(\pi/4)$, $\mathrm{sen}(\pi/6)=1/2$ e $\cos(\pi/6)=\sqrt{3}/2$, substituímos na Eq.(3.7) de modo a obter

$$\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right)=\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

de onde segue o resultado

$$\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\cdot$$

EXEMPLO 3.7. ARCOS COMPLEMENTARES E SUPLEMENTARES

Considere: a) $\theta_2=0$, b) $\theta_2=\pi/2$ e c) $\theta_2=\pi$ na Eq.(3.7). a) Substituindo $\theta_2=0$ na Eq.(3.7) obtemos

$$\mathrm{sen}(0-\theta_1)=\mathrm{sen}\,0\cos\theta_1-\mathrm{sen}\,\theta_1\cos 0.$$

Direto do círculo trigonométrico, temos $\mathrm{sen}\,0=0$ e $\cos 0=1$ de onde $\mathrm{sen}(-\theta_1)=-\mathrm{sen}(\theta_1)$, isto é, como vamos ver no Capítulo 6, o seno é uma função ímpar. Analogamente, mostra-se que o cosseno é uma função par.

b) Substituindo $\theta_2=\pi/2$ na Eq.(3.7) obtemos

$$\mathrm{sen}(\pi/2-\theta_1)=\mathrm{sen}\,\pi/2\cos\theta_1-\mathrm{sen}\,\theta_1\cos\pi/2.$$

Do círculo trigonométrico, temos $\mathrm{sen}\,\pi/2=1$, $\cos\pi/2=0$ e $\mathrm{sen}(\pi/2-\theta_1)=\cos(\theta_1)$, isto é, dois arcos complementares (soma igual a $\pi/2$ radianos) têm o cosseno de um igual ao seno do outro. c) Substituindo $\theta_2=\pi$ na Eq.(3.7) obtemos

$$\mathrm{sen}(\pi-\theta_1)=\mathrm{sen}\,\pi\cos\theta_1-\mathrm{sen}\,\theta_1\cos\pi.$$

Direto do círculo trigonométrico, temos $\operatorname{sen}\pi = 0$ e $\cos\pi = -1$ de onde $\operatorname{sen}(\pi - \theta_1) = \operatorname{sen}(\theta_1)$, isto é, dois arcos suplementares (soma igual a π radianos) têm o mesmo seno.

Utilizando as relações do EXEMPLO 3.7 e simetrias em relação aos eixos no círculo trigonométrico, podemos escrever relações envolvendo o seno da soma de dois arcos, bem como para os cossenos. Ressalte-se, também, que é possível mostrar tais expressões em analogia à expressão que fornece o seno da soma. Vamos apenas mencionar e as demonstrações ficam a cargo do leitor.

TEOREMA 3.2.2. SENO DA SOMA DE DOIS ARCOS

Sejam θ_1 e θ_2 dois arcos tais que, sem perda de generalidade, $0 < \theta_1 < \theta_2 < \pi/2$. Vale a relação $\operatorname{sen}(\theta_2 + \theta_1) = \operatorname{sen}\theta_2 \cos\theta_1 + \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2$.

TEOREMA 3.2.3. COSSENO DA DIFERENÇA DE DOIS ARCOS

Sejam θ_1 e θ_2 dois arcos tais que, sem perda de generalidade, $0 < \theta_1 < \theta_2 < \pi/2$. Vale a seguinte relação $\cos(\theta_2 - \theta_1) = \cos\theta_2 \cos\theta_1 + \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2$.

TEOREMA 3.2.4. COSSENO DA SOMA DE DOIS ARCOS

Sejam θ_1 e θ_2 dois arcos tais que, sem perda de generalidade, $0 < \theta_1 < \theta_2 < \pi/2$. Vale a seguinte relação $\cos(\theta_2 + \theta_1) = \cos\theta_2 \cos\theta_1 - \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2$.

3.2.2 Arcos dobro e metade

Nessa seção, estamos interessados em dadas as linhas trigonométricas de um arco θ, obter as linhas trigonométricas do arco $k\theta$ com $k = 2, 3, \ldots$ Aqui, discutimos apenas o primeiro caso $k = 2$, isto é, o arco dobro. Por outro lado, o arco metade consiste em determinar as linhas trigonométricas de arcos do arco $\theta/2$ conhecida as linhas trigonométricas do arco θ. Em analogia à soma (subtração) de arcos, vamos apenas discutir as linhas trigonométricas seno e cosseno, pois as demais podem ser determinadas através das relações entre elas.

3.2.2.1 Arco dobro

Vamos considerar $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ nas expressões que fornecem o seno da soma de dois arcos TEOREMA 3.2.2 e o cosseno da soma de dois arcos TEOREMA 3.2.4, de onde podemos escrever, já simplificando, as expressões do arco dobro, também chamado arco duplo

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \qquad \text{e} \qquad \cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\cdot \tag{3.8}$$

Expressões para os arcos 3θ, 4θ, etc... podem ser obtidas a partir do mesmo procedimento, que são deixados a cargo do leitor. Apenas como exemplo, discutimos a expressão para a $\tan 3\theta$.

EXEMPLO 3.8. CALCULAR $\tan 3\theta$ EM FUNÇÃO DA $\tan\theta$

Utilizando o Exercício 45 e a definição da tangente, podemos escrever

$$\tan 3\theta = \frac{3\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta - \operatorname{sen}^3\theta}{\cos^3\theta - 3\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta} = \tan\theta \cdot \frac{3\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta - 3\operatorname{sen}^2\theta}.$$

Fatorando $\cos^2\theta$ no numerador e no denominador e usando o fato que a tangente é o quociente do seno pelo cosseno, desde que definida, podemos escrever

$$\tan 3\theta = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta},$$

que é a expressão desejada.

3.2.2.2 Arco metade

O problema do arco metade, também conhecido como bisseção de arcos, consiste em calcular as linhas trigonométricas do arco metade, $\theta/2$, conhecidas as linhas trigonométricas do arco, θ. Ressaltamos que, basta calcular uma linha trigonométrica para que as demais estejam especificadas, através das relações envolvendo as seis linhas trigonométricas. É costume expressar as linhas trigonométricas do arco metade através do cosseno do arco. Em analogia ao arco duplo, vamos explicitar apenas as linhas trigonométricas de $\operatorname{sen}\theta/2$ e $\cos\theta/2$, pois as demais são calculadas através das relações envolvendo as outras quatro linhas trigonométricas. A partir da Eq.(3.8) relativa ao cosseno, consideramos $\theta \to \theta/2$ e usando a relação fundamental da trigonometria, podemos escrever o seguinte sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \cos^2\theta/2 - \operatorname{sen}^2\theta/2 & = & \cos\theta \\ \cos^2\theta/2 + \operatorname{sen}^2\theta/2 & = & 1. \end{array} \right.$$

Nesse sistema, ora somando as equações e ora subtraindo as equações e explicitando a respectiva linha trigonométrica do arco metade, podemos escrever

$$\cos\theta/2 = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}\theta/2 = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

ou seja, a menos de um sinal, caracterizam a respectiva linha trigonométrica. Outra expressão que merece destaque é aquela em que escrevemos as linhas trigonométricas em termos da tangente do arco metade, $\tan\theta/2$, expressão essa de grande utilidade no cálculo de várias integrais, como será visto no Capítulo 9, em particular envolvendo as linhas trigonométricas $\sec\theta$ e $\operatorname{cosec}\theta$, conforme Exercício 46.

EXEMPLO 3.9. DETERMINE $\cot\pi/12$

Temos mais de uma maneira de abordar esse problema. Usando o arco dobro, ou dividindo o respectivo cosseno pelo seno ou calculando a tangente e depois invertendo. Vamos optar pela última, isto é, sabendo que $\tan\pi/6 = \sqrt{3}/3$, vamos calcular a tangente de $\pi/12$, através da expressão que explicita a tangente de um arco em termos da tangente do respectivo arco metade, Exercício 46, logo

$$\tan\pi/6 = \frac{2a}{1-a^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

sendo $a = \tan\pi/12$. Essa é uma equação do segundo grau na variável a cujas raízes são dadas por $a = -\sqrt{3} \pm 2$. Visto que o arco de $\pi/12$ radianos encontra-se no primeiro quadrante, onde todas as linhas trigonométricas têm o sinal positivo, descartamos o sinal negativo de onde podemos escrever $\tan\pi/12 = -\sqrt{3}+2$. Como a cotangente é dada por $\cot\theta = 1/\tan\theta$ podemos escrever

$$\cot\pi/12 = \frac{1}{-\sqrt{3}+2} \cdot \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+2}$$

de onde segue $\cot\pi/12 = 2+\sqrt{3}$.

3.2.3 Transformação de somas em produtos

Convém lembrar que as progressões aritmética, associada com somas e subtrações, e geométrica, associada com produtos e divisões, têm uma relação entre elas envolvendo o logaritmo. Os logaritmos apareceram para simplificar cálculos, uma vez que transformam multiplicações e divisões em operações mais simples de se manipular, soma e subtração. Aqui, vamos obter as chamadas fórmulas de prostaférese, uma combinação das palavras adição e subtração, em Grego, que expressam a soma e a subtração de senos e cossenos em expressões envolvendo um produto. Vamos explicitar o desenvolvimento de apenas uma delas, deixando a cargo do leitor as outras três.

TEOREMA 3.2.5. SOMA DE DOIS SENOS

Sejam θ_1 e θ_2 dois arcos dados em radianos. Vamos obter a expressão

$$\operatorname{sen}\theta_1 + \operatorname{sen}\theta_2 = 2\operatorname{sen}\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}. \tag{3.9}$$

Essa expressão nos garante que podemos escrever a soma de dois senos expressa como o produto de um seno da semisoma por um cosseno da semidiferença. A fim de mostrar esse resultado, utilizamos o TEOREMA 3.2.2 e a Eq.(3.7) a saber

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\theta_2+\theta_1) &= \operatorname{sen}\theta_2\cos\theta_1 + \operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2\\ \operatorname{sen}(\theta_2-\theta_1) &= \operatorname{sen}\theta_2\cos\theta_1 - \operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2.\end{aligned}$$

Adicionando as duas últimas equações, no primero membro, obtemos a soma de dois senos enquanto no segundo membro o produto de um seno por um cosseno

$$\operatorname{sen}(\theta_2+\theta_1) + \operatorname{sen}(\theta_2-\theta_1) = 2\operatorname{sen}\theta_2\cos\theta_1.$$

Introduzindo a notação $\theta_2+\theta_1 \to \theta_1$ e $\theta_2-\theta_1 \to \theta_2$ podemos escrever

$$\operatorname{sen}\theta_1 + \operatorname{sen}\theta_2 = 2\operatorname{sen}\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}$$

que é exatamente a Eq.(3.9).

Com um procedimento análogo encontramos as outras três, a saber:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\theta_1 - \operatorname{sen}\theta_2 &= 2\operatorname{sen}\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\\ \cos\theta_1 + \cos\theta_2 &= 2\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\\ \cos\theta_1 - \cos\theta_2 &= -2\operatorname{sen}\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\operatorname{sen}\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\end{aligned} \tag{3.10}$$

conhecidas com o nome de fórmulas de prostaférese.

EXEMPLO 3.10. RESOLVA A EQUAÇÃO $\cos x + \cos y = 0$ COM x, y EM RADIANOS

Esse é o típico exercício onde as fórmulas de prostaférese desempenham papel crucial, pois ao transformar essa soma em um produto, sabemos que cada um de seus fatores deve ser nulo, uma vez que o segundo membro é zero.

Utilizando a Eq.(3.10), soma de cossenos, com a identificação $\theta_1 = x$ e $\theta_2 = y$ podemos escrever

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.$$

Para um produto ser nulo, um de seus fatores deve ser nulo, logo devemos resolver as equações trigonométricas

$$\cos\frac{x+y}{2} = 0 \qquad \text{e} \qquad \cos\frac{x-y}{2} = 0.$$

A solução de cada uma dessas equações é imediata, pois o cosseno é zero para arcos $\pi/2 + k\pi$ com $k = 0, 1, 2, \ldots$ logo, obtemos

$$\frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{2} + k_1\pi \qquad \text{e} \qquad \frac{x-y}{2} = \frac{\pi}{2} + k_2\pi$$

onde $k_1, k_2 = 0, 1, 2, \ldots$ Resolvendo (somando e subtraindo) para x e y temos

$$x = \pi + (k_1 + k_2)\pi \qquad \text{e} \qquad y = (k_1 - k_2)\pi$$

onde $k_1, k_2 = 0, 1, 2, \ldots$

EXEMPLO 3.11. LIMITE FUNDAMENTAL TRIGONOMÉTRICO

Vamos concluir o capítulo com o chamado limite fundamental trigonométrico que será apresentado formalmente no Capítulo 7, pois a maneira com que vamos apresentá-lo está completamente associada à trigonometria e o cômputo de áreas de figuras conhecidas. Note que, ainda não foi introduzido o conceito de limite, para tal, considere a Figura 3.11. Destacamos, também, como será abordado no Capítulo 6, além dos chamados eixos dos senos, coincidente com o eixo $y'y$, e dos cossenos, coincidente com o eixo $x'x$, os eixos das tangentes, paralelo ao eixo $y'y$ e das cotangentes, paralelo ao eixo $x'x$.

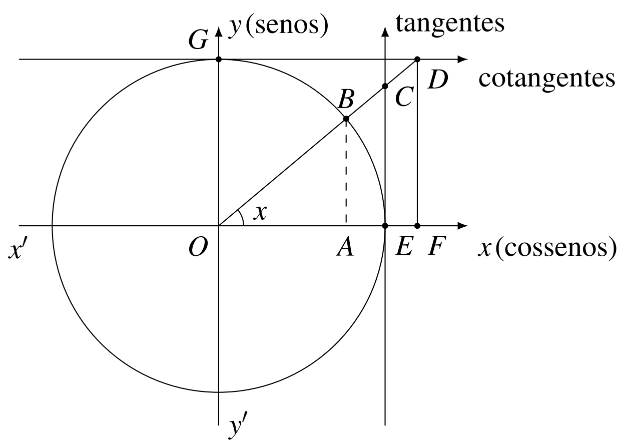


Figura 3.11: Limite fundamental $\operatorname{sen} x/x$.

Então, na notação que será apresentada no Capítulo 7, vamos mostrar que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

ou seja, o limite de $\operatorname{sen} x$ sobre x quando $x \to 0$ (tão próximo de zero quanto se queira, mas não é zero) é igual a 1. Ainda mais, note que temos um quociente de um número tão pequeno quanto se queira, tanto no numerador quanto no denominador, o que caracteriza uma indeterminação. Calcular o limite significa, levantar essa indeterminação. Voltamos a esse tema no Capítulo 7.

Da Figura 3.11 podemos escrever a dupla desigualdade envolvendo áreas de triângulos, denotadas por A_t e setor circular, denotada por A_s,

$$A_t(OAB) < A_s(OEB) < A_t(OEC).$$

Explicitando essas áreas, a dupla desigualdade vem escrita na forma

$$\frac{\overline{OA}\cdot\overline{AB}}{2} < \frac{\widehat{EB}\cdot\overline{OE}}{2} < \frac{\overline{OE}\cdot\overline{EC}}{2}$$

Lembrando que $\overline{OE} = 1$, raio da circunferência trigonométrica, enquanto $\overline{AB} = \operatorname{sen} x$; $\overline{OA} = \cos x$ e $\overline{EC} = \tan x$, podemos escrever

$$\cos x \cdot \operatorname{sen} x < 1 \cdot x < 1 \cdot \tan x.$$

Sem perda de generalidade, consideremos $x > 0$, de onde obtemos, já dividindo a dupla desigualdade por $\operatorname{sen} x$

$$\cos x < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x} \tag{3.11}$$

ou ainda, invertendo, na seguinte forma

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\operatorname{sen} x}{x} > \cos x.$$

Tomando x tão próximo de zero quanto se queira, $x \to 0$ (dizemos, x tendendo a zero) e lembrando que $\cos 0 = 1$, podemos escrever

$$1 > \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} > 1.$$

A partir do chamado teorema do confronto que será apresentado e discutido no Capítulo 7, concluímos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1,$$

chamado limite fundamental trigonométrico. É importante notar que, temos uma quantidade que está entre dois números iguais, isto é, a unidade, logo deve ser igual à unidade. Procedimento análogo para mostrar que, partindo da Eq.(3.11), vale a relação

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1.$$

3.3 Exercícios

1. a) Obtenha uma relação para converter a medida de arcos em graus para radianos. b) Explicite uma tabela de senos e cossenos dos arcos $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$, $2\pi/3$, $3\pi/4$, $5\pi/6$, $7\pi/6$, $5\pi/4$, $4\pi/3$, $5\pi/3$, $7\pi/4$ e $11\pi/6$, todos em radianos.

2. Sendo $\cos x = -4/5$ e x encontra-se no terceiro quadrante, determine as demais linhas trigonométricas associadas a esse arco.

3. Sendo $\tan x = -\sqrt{3}$ e x encontra-se no quarto quadrante, determine as demais linhas trigonométricas associadas a esse arco.

4. Sendo $\operatorname{cosec} x = 2$ e x encontra-se no segundo quadrante, determine as demais linhas trigonométricas associadas a esse arco.

5. Sabendo que $\cot x = \sqrt{3}/3$ com $0 < x < \pi/2$, determine o valor de $6\cos^2 x + \tan^2 x$.

6. Verifique a identidade $\operatorname{sen}^2 x + \cot^2 x \cdot \operatorname{sen}^2 x = 1$.

7. Calcule o valor de x, se existir, de modo que satisfaça, simultaneamente, as identidades

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{2x+1}{5} \qquad \text{e} \qquad \sec\alpha = \frac{5}{x+3}.$$

8. Determine $k \in \mathbb{R}$ para os quais os ângulos da forma $k - \pi/2$ tenham tangente.

9. Determine $k \in \mathbb{R}$ para os quais os ângulos da forma $k + \pi$ tenham cotangente.

10. Reduza ao primeiro quadrante o arco $5\pi/4$ radianos e mostre que têm a mesma tangente.

11. Reduza à primeira determinação positiva ($0 < \theta < 2\pi$) o arco $8\pi/3$ radianos e mostre que têm o mesmo seno.

12. Reduza à primeira determinação positiva o arco $545°$ e mostre que têm cotangentes com mesmo sinal.

13. Simplifique a expressão

$$\Omega = \frac{\tan(\pi/2 + x) \cdot \operatorname{sen}(\pi/2 + x) \cdot \operatorname{sen}(-x)}{\cot(\pi - x) \cdot \sec(3\pi/2 + x)},$$

sendo x um arco no primeiro quadrante.

14. Simplifique a expressão

$$\Lambda = \frac{\operatorname{sen}(\pi/2 + x) \cdot \operatorname{sen}(\pi + x) \cdot \operatorname{sen}(3\pi/2 + x)}{\cos(\pi/2 - x) \cdot \cos(\pi/2 + x) \cdot \cos(3\pi/2 - x)},$$

sendo x um arco no primeiro quadrante.

15. Calcule o valor numérico da expressão

$$\Xi = \frac{\tan x \cdot \cos(\pi/2 - x)}{\operatorname{sen} x \cdot \tan(\pi + x)}.$$

16. Calcule o valor numérico da expressão

$$\Omega = \frac{\cot x \cdot \operatorname{sen}(\pi/2 + x)}{\cos x \cdot \cot(\pi/2 + x)}.$$

17. Calcule o valor de $\Lambda = \dfrac{\cos x + \operatorname{sen} x + \tan x}{\cot x + \sec x + \operatorname{cosec} x}$ para $x = \pi/4$.

18. (Fuvest/96-Adaptado) Determine o valor de $\operatorname{sen} a$ sabendo que os números reais $\operatorname{sen}\pi/12$, $\operatorname{sen} a$ e $\operatorname{sen} 5\pi/12$ formam, nessa ordem, uma progressão aritmética.

19. (Fuvest/96-Adaptado) Resolva a equação $2\operatorname{sen} x \cdot \cos x + (\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 5x) = 0$ no intervalo fechado $[0,\pi]$.

20. (Fuvest/94-Adaptado) Determine o valor de $(\tan\pi/18 + \cot\pi/18)\cdot\operatorname{sen}\pi/9$.

21. (Fuvest/94-Adaptado) a) Calcule $\operatorname{sen} 15°$. b) Calcule a área do polígono regular de 24 lados inscrito no círculo de raio 1.

22. (Unicamp/96) Ache todos os valores de x, no intervalo $[0,2\pi]$, para os quais

$$\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}.$$

23. (Unicamp/95) Encontre todos os valores do sistema

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(x+y) & = & 0 \\ \operatorname{sen}(x-y) & = & 0 \end{cases}$$

que satisfaçam $0 \le x \le \pi$ e $0 \le y \le \pi$.

24. (Vunesp/96-Adaptado) Sabe-se que um dos ângulos internos de um triângulo mede $120°$. Se os outros dois ângulos, x e y são tais que

$$\frac{\cos x}{\operatorname{sen} y} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

determine a diferença entre as medidas de x e y.

25. (ITA/96-Adaptado) Seja $a \in [-\pi/4, \pi/4]$ um número real dado. Determine a relação entre x_0 e y_0, sabendo que (x_0, y_0) é solução do sistema

$$\begin{cases} (\operatorname{sen} a)x - (\cos a)y & = & -\tan a \\ (\cos a)x + (\operatorname{sen} a)y & = & -1. \end{cases}$$

26. (ITA/96-Adaptado) Seja $\alpha \in [0,\pi/2]$, tal que $\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha = m$. Determine o valor de

$$y = \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{\operatorname{sen}^3\alpha + \cos^3\alpha}.$$

27. (ITA/95-Adaptado) Mostre que a expressão

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}$$

com $0 < \theta < \pi$ é igual a $\tan\theta/2$.

28. (ITA/94-Adaptado) Sendo $x \in]0,\pi/2[$, $x \neq \pi/4$ simplifique a expressão

$$\frac{1}{(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)^2} - \frac{4\tan^2 x}{(1-\tan^2 x)^2}.$$

29. (ITA/94-Adaptado) Um triângulo ABC, retângulo em A, possui área S. Determine S sabendo que $x = A\hat{B}C$ e r é o raio da circunferência circunscrita a esse triângulo.

30. Mostre que a medida do ângulo inscrito numa circunferência é a metade do correspondente ângulo central.

31. LEI DOS COSSENOS. O quadrado de um dos lados de um triângulo qualquer é igual a soma dos quadrados dos outros dois lados menos o duplo produto destes dois lados multiplicado pelo cosseno do ângulo formado por esses dois lados. Ela pode ser interpretada como uma generalização do teorema de Pitágoras pois se reduz a este no caso em que temos um triângulo retângulo, isto é, um dos ângulos é reto. Sejam α, β e γ os ângulos internos de um triângulo de lados, respectivamente, a, b e c, e vértices A, B e C, mostre que vale a lei dos cossenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

32. (Olimpíadas Colombianas de Matemática – 2010) Qual é o valor de

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{32}\right)\cos\left(\frac{\pi}{32}\right)\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}\ ?$$

33. LEI DOS SENOS. Em todo triângulo, a razão entre um lado e o seno do ângulo oposto é constante, isto é, a mesma seja qual for o lado escolhido. Há uma interpretação geométrica para a razão $a/\operatorname{sen}\widehat{A}$. Ela é igual ao diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo ABC [10]. Demonstre a lei dos senos.

34. (Olimpíadas Colombianas de Matemática – 2010) O hexágono regular de vértices $ABCDEF$ tem os vértices A e C nos pontos $(0,0)$ e $(7,1)$, respectivamente. Calcule a área do hexágono.

35. Dados os ângulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e o lado c, determine o ângulo $\widehat{C}$ e os outros dois lados, a e b.

36. (ENE–1959-Adaptado) A razão entre dois lados de um triângulo é $2+\sqrt{3}$ e o ângulo por eles formado é de 60°. Calcule os outros dois ângulos. É possível determinar os lados? Justifique.

37. Calcule a) $\operatorname{sen}(11\pi/12)$ e b) $\operatorname{sen}(7\pi/12)$.

38. Simplifique a expressão
$$\Lambda = \frac{\operatorname{cosec}x + \cos x}{\sec x + \operatorname{sen}x}.$$

39. Mostre que $\operatorname{sen}(A+B) = \operatorname{sen}A\cos B + \operatorname{sen}B\cos A$.

40. Mostre que $\tan 50° = 1/\tan 40°$.

41. Verifique que $\tan 20°\tan 30°\tan 40° = \tan 10°$.

42. Resolva a equação $\sqrt{3}\operatorname{sen}x = 1 + \cos x$.

43. Seja $0 \le x \le 2\pi$. Resolva a inequação trigonométrica $\cos x + \sqrt{3}\operatorname{sen}x \le 1$.

44. Mostre que a tangente da soma(diferença) de dois arcos A e B é dada por

$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$

45. Mostre que $\operatorname{sen} 3\theta = 3\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta - \operatorname{sen}^3\theta$ e $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta$.

46. Expresse $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$ e $\tan\theta$ em termos de $\tan\theta/2$.

47. (Fuvest/SP) Considere o quadrilátero da Figura 3.12 onde $\widehat{B}$ e $\widehat{D}$ são ângulos retos. Calcule o valor de $\operatorname{sen}\widehat{A}$.

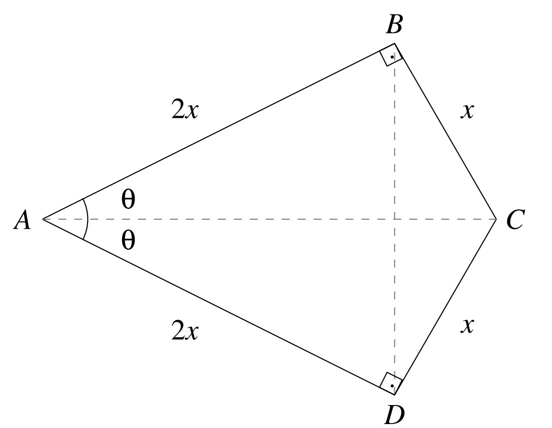


Figura 3.12: Quadrilátero relativo ao Exercício 47.

48. Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $\theta \neq \frac{\pi}{2} \pm k\pi$ com $k = 1, 2, 3, \ldots$ Mostre que a equação quadrática na variável x, $x^2 - 2\tan\theta x - 1 = 0$ sempre admite solução. Determine-as.

49. Seja $x \in \mathbb{R}$. Esboce, num mesmo sistema de eixos, o gráfico para as linhas trigonométricas: (a) $y(x) = \operatorname{sen} x$, (b) $y(x) = \operatorname{sen} 2x$ e (c) $y(x) = \operatorname{sen}(x/2)$. O que você pode concluir?

50. (Fuvest/2014-Adaptado) O triângulo AOB é isósceles, com $OA = OB$, e $ABCD$ é um quadrado. Sendo θ a medida do ângulo $A\widehat{O}B$, qual deve ser a condição sobre o ângulo θ, a fim de que a área do quadrado seja maior do que a área do triângulo? São dados: $\tan 14° \simeq 0,2493$; $\tan 15° \simeq 0,2679$; $\tan 20° \simeq 0,3640$ e $\tan 28° \simeq 0,5317$.

51. (Fuvest/2015-Adaptado) Sabe-se que exitem números reais A e x_0, sendo $A > 0$, tais que

$$\operatorname{sen} x + 2\cos x = A\cos(x - x_0)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Determine A.

52. (Fuvest/2016-Adaptado) Considere o quadrilátero $ABCD$ de ângulos $A\widehat{B}C$ e $A\widehat{D}C$ retos, $AB = AD = 1$, $BC = CD = 2$ e $\overline{BD}$ é uma diagonal. Determine o cosseno do ângulo $B\widehat{C}D$.

53. (Unicamp/2017-Adaptado) Seja $x \in \mathbb{R}$ com $0 < x < \pi/2$. Sabendo que a sequência de três termos $(\tan x, \sec x, 2)$ é uma PA, determine a sua razão.

54. (Unicamp/2018-Adaptado) Seja $x \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{sen} x + \cos x = 0,2$. Determine o valor de $|\operatorname{sen} x - \cos x|$.

55. (ITA/2018-Adaptado) Considere a equação, no intervalo $]-\pi/2, \pi/2[$,

$$\frac{\tan^3 x - 3\tan x}{1 - 3\tan^2 x} + 1 = 0.$$

O que podemos afirmar em relação à soma das soluções?

3.3.1 Respostas e/ou sugestões

1. a) Relacione o comprimento da circunferência em graus e radianos, através de uma regra de três simples. b) Tabela, a seguir

radianos	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	$7\pi/6$	$5\pi/4$	$4\pi/3$	$5\pi/3$	$7\pi/4$	$11\pi/6$
graus	30	45	60	120	135	150	210	225	240	300	315	330

2. $\operatorname{sen} x = -3/5$, $\tan x = 3/4$, $\cot x = 4/3$, $\sec x = -5/4$, $\operatorname{cosec} x = -5/3$.

3. $\operatorname{sen} x = -\sqrt{3}/2$, $\cot x = -\sqrt{3}/3$, $\cos x = 1/2$, $\sec x = 2$, $\operatorname{cosec} x = -2\sqrt{3}/3$.

4. $\operatorname{sen} x = 1/2$, $\cot x = -\sqrt{3}$, $\cos x = -\sqrt{3}/2$, $\sec x = -2\sqrt{3}/3$, $\tan x = -\sqrt{3}/3$.

5. $9/2$.

6. Expresse a cotangente em termos de senos e cossenos.

7. $x = 1$.

8. $k \neq \pi(m+1)/2$ com m um número ímpar.

9. $k \neq \pi(m-1)$ com m um número inteiro.

10. $5\pi/4 = \pi + \pi/4$. Visto que $\tan 5\pi/4 = \tan \pi/4$, quadrantes terceiro e primeiro, respectivamente, as tangentes são iguais.

11. $8\pi/3 = 2\pi + 2\pi/3$. Visto que $\operatorname{sen} 8\pi/3 = \operatorname{sen} 2\pi/3$, ambos no segundo quadrante, portanto têm o mesmo seno.

12. 545°= 360°+185° . Ambos no terceiro quadrante, portanto têm a mesma cotangente.

13. $\Omega = -\operatorname{sen}^2 x \cos x$.

14. $\Lambda = \cot^2 x$.

15. $\Xi = 1$.

16. $\Omega = -\cot^2 x$.

17. $\lambda = (3+\sqrt{2})/7$.

18. $\operatorname{sen} a = \sqrt{6}/4$.

19. $\{0, \pi/2, \pi, \pi/9, 5\pi/9, 7\pi/9\}$.

20. 2.

21. a) $(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$; b) $3(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.

22. $\{\pi/6, \pi/3\}$.

23. $\{(0,0),(0,\pi),(\pi,0)(\pi,\pi),(\pi/2,\pi/2)\}$.

24. Mostre que $\cot y = 1$ e conclua que a diferença é $30°$.

25. $x_0 \cdot y_0 = 0$.

26. $2(m^2-1)/m(3-m^2)$.

27. Utilize a expressão do arco metade e a expressão que relaciona a soma de dois cossenos em termos de um produto ou, alternativamente, as expressões do arco dobro e do arco metade.

28. Utilize a expressão do arco dobro (seno e cosseno) para mostrar que o quociente é 1.

29. Construa um triângulo retângulo inscrito na circunferência para mostrar que $S = r^2 \operatorname{sen} 2x$.

30. Destaque dois triângulos isósceles e use o fato que a soma dos ângulos internos num triângulo é π rad.

31. Trace a altura relativa ao lado oposto do ângulo $\widehat{A}$ e use o teorema de Pitágoras.

32. 16.

33. Trace as alturas relativas a dois vértices e use a definição da linha trigonométrica seno para obter $\dfrac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$.

34. $25\sqrt{3}$.

35. $C = 180 - (A+B), \qquad a = c\dfrac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen}(A+B)}, \qquad b = c\dfrac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen}(A+B)}$.

36. a) $\alpha = 75°$ e $\beta = 45°$; b) Não é possível, pois só conhecemos uma relação entre dois deles.

37. a) Escreva $11\pi/12 = \pi/4 + 2\pi/3$ para mostrar que $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ e b) Escreva $7\pi/12 = \pi/4 + \pi/3$ para mostrar que $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

38. $\cot x$.

39. Utilize a circunferência trigonométrica e áreas de figuras planas. Veja Seção 3.2.1.

40. Utilize a expressão para a tangente de uma soma de arcos.

41. Escreva $\tan 10° = \cot 80° = 1/\tan 80°$ e expresse o produto em termos de senos e cossenos a fim de mostrar que $\tan 20° \cdot \tan 40° \cdot \tan 80° = \cot 30°$. Expresse os produtos $\text{sen}\, 80° \cdot \text{sen}\, 40°$ e $\cos 80° \cdot \cos 40°$ em termos de somas, simplifique, rearranje e use novamente as fórmulas de prostaférese.

42. $\left\{x \in \mathbb{R} : x = (2k+1)\pi \text{ ou } x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\right\}$ com $k = 0, 1, 2, \ldots$.

43. $\left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{5\pi}{3} \leq x \leq 2\pi \text{ ou } \dfrac{\pi}{2} < x \leq \dfrac{5\pi}{6}\right\}$.

44. Utilize a relação $\tan(A \pm B) = \text{sen}(A \pm B)/\cos(A \pm B)$.

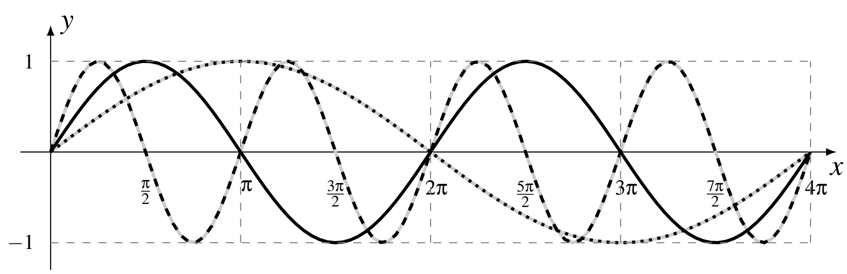
45. Determine as expressões $\text{sen}(\theta + 2\theta)$ e $\cos(\theta + 2\theta)$ e use as expressões do arco dobro.

46. $\cos\theta = \dfrac{1-a^2}{1+a^2}$, $\text{sen}\,\theta = \dfrac{2a}{1+a^2}$, $\tan\theta = \dfrac{2a}{1-a^2}$, com $a = \tan\theta/2$.

47. $4/5$

48. $(\text{sen}\,\theta \pm 1)/\cos\theta$.

49. Esboço dos gráficos de $y(x) = \text{sen}\, x$; $y(x) = \text{sen}\, 2x$ e $y(x) = \text{sen}(x/2)$. Os períodos são diferentes.



50. Expresse as áreas em função de θ a fim de obter a inequação $\tan\theta/2 > 1/4$ para mostrar que $30° < \theta < 150°$. Note que $\theta < 180°$.

51. Escreva $\text{sen}\, x + 2\cos x = \sqrt{5}(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\text{sen}\, x + \dfrac{2}{\sqrt{5}}\cos x)$. Visto que $1^2 + 2^2 = (\sqrt{5})^2$, considere $\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \text{sen}\, x_0$ e $\dfrac{2}{\sqrt{5}} = \cos x_0$ de modo a obter $\sqrt{5}\cos(x - x_0) = A\cos(x - x_0)$. Conclua que $A = \sqrt{5}$.

52. $3/5$.

53. $1/3$.

54. $7/5$.

55. Nesse intervalo a soma das raízes é um número maior que zero.

Capítulo 4

Números complexos

Considere dois políonos regulares de 2018 e 2019 lados. Sabendo que estão inscritos numa circunferência, quantos são os vértices em comum?

Vamos apresentar uma introdução aos números complexos a fim de poder resolver equações algébricas, no próximo capítulo, bem como revelar a importante relação com a trigonometria, associado com as rotações.

4.1 Forma algébrica

Começamos por introduzir o conceito de número complexo na forma algébrica e destacar dois casos limites, bem como apresentar os conceitos de complexo conjugado, módulo, ou valor absoluto e argumento. Passamos a discutir as operações realizadas com números complexos na forma algébrica para depois introduzir a chamada forma trigonométrica.

DEFINIÇÃO 4.1.1. FORMA ALGÉBRICA

Sejam x e y números reais. Um número complexo, denotado por z, é um número da forma $z = x+iy$, onde $i = \sqrt{-1}$, a chamada unidade imaginária.

Ao fixar um sistema de eixos coordenados no plano, representamos o número complexo z pelas coordenadas do ponto, $P(x,y)$. Aqui, x denota a abscissa, coincidente com o eixo real, e y a ordenada, o eixo vertical, chamado de eixo imaginário. Ressalte-se a importância de especificar a ordem, isto é, um par ordenado, pois nem sempre $P(x,y) = Q(y,x)$. O plano no qual representamos os números complexos é chamado de plano de Argand-Gauss.

A partir da forma algébrica, estudamos os dois casos limites, a saber: um ponto no eixo x e outro no eixo y. No primeiro caso temos $y = 0$ de onde segue $z = x+0i$ e $P(x,0)$ enquanto no segundo temos $x = 0$ de onde segue $z = 0+iy$ e $P(0,y)$. As partes x e y do complexo z são chamadas parte real, denotada por $x = \mathrm{Re}(z)$, e parte imaginária, denotada por $y = \mathrm{Im}(z)$. Ressalte-se que dois números complexos $z_1 = x_1+iy_1$ e $z_2 = x_2+iy_2$ são iguais se, e somente se, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$, isto é, têm as mesmas partes reais e as mesmas partes imaginárias.

DEFINIÇÃO 4.1.2. COMPLEXO CONJUGADO

Dado um número complexo $z = x + yi$ com $x, y \in \mathbb{R}$, chama-se complexo conjugado, denotado por $\bar{z}$, o número complexo $\bar{z} = x - yi$.

DEFINIÇÃO 4.1.3. MÓDULO

Chama-se módulo de um número complexo $z = x + yi$ com $x, y \in \mathbb{R}$, denotado por $|z| \equiv r$, ao número, estritamente positivo, dado por

$$r \equiv |z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{4.1}$$

DEFINIÇÃO 4.1.4. ARGUMENTO

Considere o número complexo $z = x + yi$ com $x, y \in \mathbb{R}$. Chama-se argumento do número complexo z, denotado por $\text{Arg}(z) \equiv \alpha$, a qualquer um dos ângulos $\alpha = \theta + 2k\pi$ com $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ e θ o ângulo formado pela semirreta OP com o semieixo positivo Ox. Ver Figura 4.1.

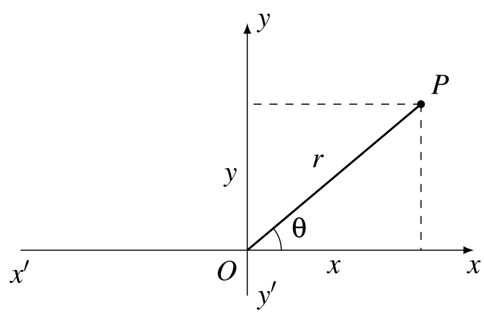


Figura 4.1: Argumento e módulo.

EXEMPLO 4.1. REPRESENTAÇÃO DE UM NÚMERO COMPLEXO

Considere o número complexo $z = \sqrt{3} + i$. Determine o: a) complexo conjugado; b) módulo e c) argumento. Esboce, num mesmo sistema de eixos, os números complexos z e $\bar{z}$, destacando o módulo e o argumento.

Identificando, temos $x = \sqrt{3}$ e $y = 1$. a) Para o complexo conjugado, basta trocar o sinal da parte imaginária, resultando $\bar{z} = \sqrt{3} - i$; b) O módulo é dado pela expressão

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{3 + 1} = 2.$$

c) Para determinar o argumento, voltemos à trigonometria. Temos um triângulo retângulo com hipotenusa igual a 2 e os catetos, adjacente igual a $\sqrt{3}$ e oposto igual a 1. Escolhendo uma linha trigonométrica, por exemplo, cosseno, podemos escrever $\cos\theta = \sqrt{3}/2$ de onde segue que $\theta = \pi/6$ radianos. Logo o argumento é tal que $\alpha = \pi/6 + 2k\pi$ com $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Observe-se da Figura 4.2 que P e P' têm a mesma parte real e partes imaginárias iguais, porém de sinais opostos e os argumentos com soma um múltiplo inteiro de 2π radianos. Ainda mais, os dois têm o mesmo módulo.

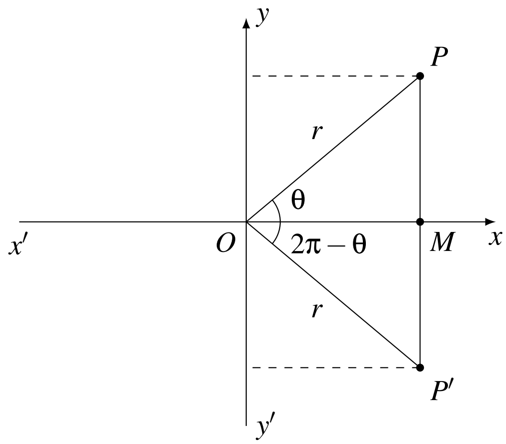


Figura 4.2: Representação de um número complexo e seu conjugado.

Enfim, antes de passarmos para a discussão das operações algébricas com números complexos, ressaltamos que não é possível estabelecer uma ordem para os números complexos. Diante desse fato, não podemos falar em números imaginários positivos ou negativos, bem como que um número complexo é maior ou menor que um outro. No demais, as operações têm mantidas as mesmas propriedades dos reais, formalmente.

4.1.1 Operações na forma algébrica

Aqui vamos discutir as quatro operações, adição, subtração, multiplicação e divisão envolvendo números complexos escritos na forma algébrica. Imediatamente após cada uma delas, apresentamos um exemplo.

4.1.1.1 Adição e subtração

Sejam $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$, com $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, dois números complexos. Somamos ou subtraímos esses números complexos somando ou subtraindo, respectivamente, partes reais e imaginárias, separadamente.

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + y_1 i) \pm (x_2 + y_2 i) = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i.$$

EXEMPLO 4.2. SOMA E SUBTRAÇÃO DE DOIS COMPLEXOS

Considere os números complexos $z_1 = -2 + 5i$ e $z_2 = 3 - 4i$. Calcule a adição $z = z_1 + z_2$ e a subtração $w = z_1 - z_2$.

Temos, para a adição $z = (-2+5i) + (3-4i) = (-2+3) + (5-4)i = 1 + i$ enquanto, para a subtração temos $w = (-2+5i) - (3-4i) = (-2-3) + (5+4)i = -5 + 9i$.

4.1.1.2 Produto

Por definição, o produto de dois números complexos é feito de acordo com a regra do produto de polinômios, tendo em mente que $i^2 = -1$ que emerge direto do conceito de unidade imaginária $i = \sqrt{-1}$.

Sejam $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$, com $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, dois números complexos. O produto $z_1 \cdot z_2$ é dado por

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

EXEMPLO 4.3. PRODUTO DE DOIS COMPLEXOS

Considere os números complexos $z_1 = \sqrt{2} + i$ e $z_2 = 1 + 2i$. Calcule os produtos $z = z_1 \cdot z_2$ e $w = z_1^2 - z_2^2$.

Temos, $z = (\sqrt{2} + i) \cdot (1 + 2i) = \sqrt{2} \cdot 1 + \sqrt{2} \cdot 2i + i \cdot 1 + i \cdot 2i$ ou ainda, na seguinte forma $z = \sqrt{2} - 2 + (2\sqrt{2} + 1)i$. Para o segundo produto, podemos calcular z_1^2 e z_2^2 e subtrair um do outro, ou ainda utilizar diferença de dois quadrados e depois de efetuar soma e subtração, multiplicar. Optamos pela segunda maneira. Então,

$$\begin{aligned} w &= (z_1 + z_2) \cdot (z_1 - z_2) = [(\sqrt{2} + 1) + 3i] \cdot [(\sqrt{2} - 1) - i] \\ &= (\sqrt{2} + 1) \cdot (\sqrt{2} - 1) - (\sqrt{2} + 1)i + 3(\sqrt{2} - 1)i - 3i^2 \\ &= 4 + (2\sqrt{2} - 2)i\cdot \end{aligned}$$

EXEMPLO 4.4. POTÊNCIAS DA UNIDADE IMAGINÁRIA

Calcule i^{2018}.

A partir de $i^2 = -1$ temos $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ e $i^5 = i$. Segue, para calcular essa potência da unidade imaginária, devemos considerar apenas a potência relativa ao resto da divisão de 2018 por 4, isto é temos $2018 = 4 \cdot 504 + 2$ de onde

$$i^{2018} = \underbrace{i^{4 \cdot 504}}_{=1} \cdot i^2 = -1.$$

4.1.1.3 Quociente

O quociente de dois números complexos é calculado por meio de dois produtos, a saber: multiplicando o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador, lembrando que $i^2 = -1$. Sejam $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$, com $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, dois números complexos com $z_2 \neq 0$. O quociente $z_1 \div z_2$ é dado por

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \end{aligned}$$

EXEMPLO 4.5. QUOCIENTE DE DOIS NÚMEROS COMPLEXOS

Sejam $z_1 = 2-3i$ e $z_2 = 6+i$. Calcule z_1/z_2 e z_2/z_1.

Primeiramente, z_1/z_2 de onde, já multiplicando numerador e denominador pelo conjugado do denominador

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-3i}{6+i} \cdot \frac{6-i}{6-i} = \frac{12-2i-18i+3i^2}{6^2-i^2} = \frac{9-20i}{37}$$

enquanto z_2/z_1 é dado por

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{6+i}{2-3i} \cdot \frac{2+3i}{2+3i} = \frac{12+18i+2i+3i^2}{2^2-(3i)^2} = \frac{9+20i}{13}.$$

EXEMPLO 4.6. CÁLCULO DE UMA RAIZ QUADRADA

Calcule a raiz quadrada de $z = 11+60i$. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Vamos determiná-los impondo que

$$\sqrt{11+60i} = x+yi.$$

Elevando ao quadrado podemos escrever $11+60i = x^2-y^2+2xyi$. Utilizando igualdade de dois números complexos, obtemos o seguinte sistema de duas equações a duas incógnitas

$$\begin{cases} x^2-y^2 &= 11 \\ 2xy &= 60 \end{cases}$$

com solução dada por $x = \pm 6$ e $y = \pm 5$ de onde segue $\sqrt{11+60i} = \pm 6 \pm 5i$.

EXEMPLO 4.7. LUGAR GEOMÉTRICO – IGUALDADE

Determine o lugar geométrico das imagens do complexo $\operatorname{Re}\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right) = -1$. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ e $z \neq -1$. Vamos calcular, primeiramente, o quociente

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{z-1}{z+1} \cdot \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}+1} = \frac{(x-1)+yi}{(x+1)+yi} \cdot \frac{(x+1)-yi}{(x+1)-yi} = \frac{x^2+y^2-1+2yi}{(x+1)^2+y^2}$$

cuja parte real deve ser igualada à unidade, logo

$$\frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2} = -1$$

que, simplificando, fornece $x^2+y^2+x = 0$ que pode ser escrita na seguinte forma

$$(x+1/2)^2+y^2 = 1/4$$

isto é, uma circunferência centrada em $(-1/2, 0)$ e raio $1/2$.

EXEMPLO 4.8. LUGAR GEOMÉTRICO – DESIGUALDADE

Determine o lugar geométrico do complexo $|z-1+2i| \leq 5$.

Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ e $z = x+iy$. Temos $z-1+2i = (x-1)+(y+2)i$. Tomando o módulo, obtemos $|z-1+2i| = \sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}$. Logo, o lugar geométrico procurado é o círculo de centro no ponto $O(1, -2)$ e raio $r = 5$.

4.2 Forma trigonométrica

Passemos agora a respresentar um número complexo $z = x + yi$ com $x, y \in \mathbb{R}$ não mais identificando com o ponto de coordenadas x e y, $P(x, y)$ e sim por meio de um vetor $\overrightarrow{OP}$, conforme a Figura 4.3.

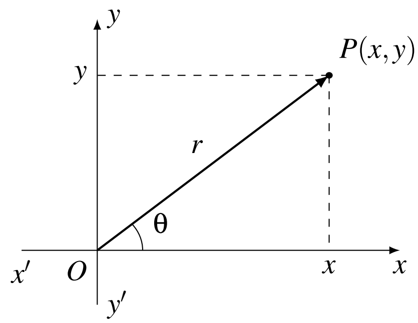


Figura 4.3: Representação de um número complexo por meio de um vetor.

Lembrando da definição de módulo, podemos escrever para o módulo do vetor $|\overrightarrow{OP}| = |z| = r$ enquanto, para o argumento do número complexo, $z \neq 0$, é, por definição, qualquer um dos ângulos que o vetor $\overrightarrow{OP}$ forma com o semieixo positivo. O argumento pertencente ao intervalo semiaberto $(-\pi, \pi]$ é chamado de argumento principal e, às vezes, costuma ser representado por $\operatorname{Arg}(z)$. Ora, se θ é um argumento de z, da Figura 4.3, podemos escrever $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$. Utilizando a forma algébrica, obtemos

$$z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) \tag{4.2}$$

a chamada forma trigonométrica para o complexo z, enquanto r, θ são as coordenadas polares no plano.

Exemplo 4.9. Forma algébrica $\times$ forma trigonométrica

Dado o número complexo $z = 1 + \sqrt{3}i$, escreva o seu complexo conjugado na forma trigonométrica. Represente esses números complexos, no mesmo sistema de eixos. Na forma algébrica, trocando o sinal da parte imaginária, temos $z = 1 - \sqrt{3}i$. Identificando com a forma algébrica temos $x = 1$ e $y = -\sqrt{3}$, de onde segue que o módulo é dado por $r = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$, enquanto o argumento é tal que $\cos\theta = 1/2$ e $\operatorname{sen}\theta = -\sqrt{3}/2$, de onde segue que $\theta = 5\pi/3$ rad e todos os demais acrescidos de um número inteiro de múltiplos de 2π, que pode ser escrito na forma $\theta = 5\pi/3 + 2k\pi$ com $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. O complexo conjugado na forma trigonométrica é dado por

$$\bar{z} = 2\left[\cos(5\pi/3 + 2k\pi) + i\operatorname{sen}(5\pi/3 + 2k\pi)\right]$$

com $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. O esboço de z e $\bar{z}$ é como na Figura 4.4. Note que têm a mesma parte real enquanto a parte imaginária tem sinal contrário.

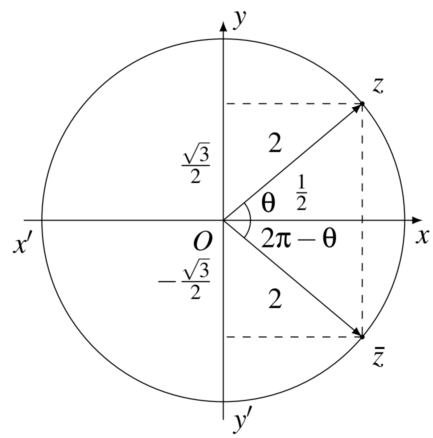


Figura 4.4: Número complex, z, o e seu complexo conjugado, $\bar{z}$.

EXEMPLO 4.10. FORMA TRIGONOMÉTRICA $\times$ FORMA ALGÉBRICA

Dado o número complexo $z = 2(\cos 2\pi/3 + i \operatorname{sen} 2\pi/3)$, obtenha o número complexo $w = z \cdot i$ na forma algébrica. Represente esses dois números complexos, num mesmo sistema de eixos.

Sabendo que $\cos 2\pi/3 = -1/2$ e $\operatorname{sen} 2\pi/3 = \sqrt{3}/2$ podemos escrever z na forma algébrica $z = -1+\sqrt{3}i$. Denotando por P o ponto da circunferência de raio 2, temos $P(-1, \sqrt{3})$, isto é um ponto no segundo quadrante. Por outro lado, multiplicando z por i obtemos $w = -\sqrt{3} - i$, a forma algébrica do número w, que vamos representar por $Q(-\sqrt{3}, -1)$, conforme Figura 4.5.

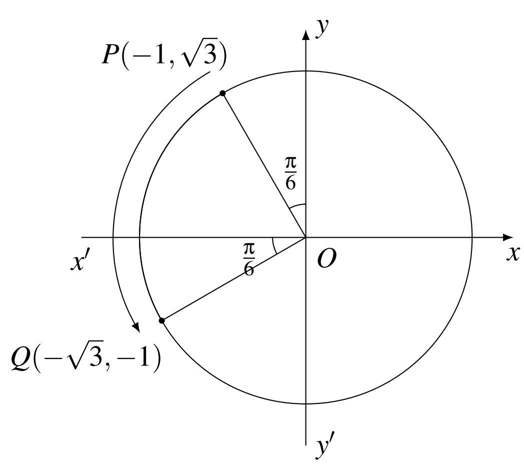


Figura 4.5: Representação dos números complexos, z e $w = z \cdot i$.

Podemos notar que ao multiplicar o número complexo z por i, obtivemos o número complexo w que, pensado como um vetor localizado, rodou-o de um ângulo de $\pi/2$ radianos no sentido antihorário, isto é, no sentido da orientação positiva. Em geral, multiplicar um número complexo z pela unidade imaginária é equivalente a efetuar uma rotação de $\pi/2$ radianos. Assim como a forma algébrica é conveniente para efetuar somas e subtrações, a forma trigonométrica é mais conveniente para efetuar produtos, quocientes, exponenciação e radiciação. Em particular, o produto (quociente) está relacionado com a soma (diferença) de arcos.

4.2.1 Produto na forma trigonométrica

Consideremos dois números complexos escritos na forma trigonométrica

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1) \qquad \text{e} \qquad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$$

onde θ_1 e θ_2 são os argumentos, medidos a partir da origem. Efetuando o produto e rearranjando obtemos

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2) + i(\text{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2)].$$

Utilizando as expressões para o seno e o cosseno da soma de arcos temos

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i(\text{sen}(\theta_1+\theta_2), \tag{4.3}$$

isto é, uma expressão que fornece o produto de dois números complexos na forma trigonométrica, ainda um outro número complexo escrito na forma trigonométrica. Note que, multiplicam-se os módulos e somam-se os argumentos. É costume, sempre que o argumento não está no intervalo $-\pi < \theta_1+\theta_2 < \pi$, reduzir para esse intervalo retirando um múltiplo inteiro de 2π radianos.

EXEMPLO 4.11. PRODUTO DE DOIS COMPLEXOS NA FORMA TRIGONOMÉTRICA

Calcule $z_1 \cdot z_2$ sendo $z_1 = \cos 4\pi/3 + i\,\text{sen}\,4\pi/3$ e $z_2 = 3(\cos 7\pi/6 + i\,\text{sen}\,7\pi/6)$. Identificando-se com a Eq.(4.3) temos: $r_1 = 1$, $r_2 = 3$, $\theta_1 = 4\pi/3$ e $\theta_2 = 7\pi/6$. O produto dos módulos é $r_1 \cdot r_2 = 3$, enquanto a soma dos argumentos é tal que $4\pi/3 + 7\pi/6 = 15\pi/6 = 2\pi + \pi/2$, logo

$$z_1 \cdot z_2 = 3(\cos\pi/2 + i\,\text{sen}\,\pi/2) = 3i.$$

4.2.2 Divisão na forma trigonométrica

Em analogia à expressão que fornece o produto de dois números complexos na forma trigonométrica, podemos escrever uma outra para o quociente de dois números complexos, desde que o denominador seja diferente de zero, de modo que vamos obter um outro número complexo cujo módulo é o quociente dos módulos e o argumento é a diferença dos argumentos. Aqui, também, vale a ressalva de que se o argumento do número complexo não está no intervalo $-\pi < \theta < \pi$, devemos eliminar um múltiplo inteiro de 2π radianos. Assim, a expressão é da forma

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i(\text{sen}(\theta_1-\theta_2)] \tag{4.4}$$

com $z_2 \neq 0$.

EXEMPLO 4.12. DIVISÃO DE DOIS COMPLEXOS NA FORMA TRIGONOMÉTRICA

Calcule $z_1 \div z_2$ sendo $z_1 = \cos 4\pi/3 + i\,\text{sen}\,4\pi/3$ e $z_2 = 3(\cos 7\pi/6 + i\,\text{sen}\,7\pi/6)$.

Identificando-se com a Eq.(4.4) temos: $r_1 = 1$, $r_2 = 3$, $\theta_1 = 4\pi/3$ e $\theta_2 = 7\pi/6$. O quociente dos módulos é $r_1 \div r_2 = 1/3$, enquanto a diferença dos argumentos é tal que $4\pi/3 - 7\pi/6 = \pi/6$, logo

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{3}(\cos\pi/6 + i\,\text{sen}\,\pi/6) = \frac{1}{6}\left(\sqrt{3}+i\right).$$

Aqui não foi necessário reduzir, pois $-\pi < \pi/6 < \pi$.

4.2.3 Potência na forma trigonométrica

O cálculo de potências de um número complexo tem a sua expressão cunhada com o nome de primeira fórmula de de Moivre. Como vamos ver a seguir, a segunda fórmula de de Moivre está associada à radiciação. Sejam r o módulo, θ o argumento do número complexo z e $n \in \mathbb{Z}$. Então, z^n é dado por

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta) \tag{4.5}$$

a chamada primeira fórmula de de Moivre. Nessa expressão lê-se: para elevar um número complexo a uma potência inteira, basta elevar o módulo a essa potência e multiplicar o argumento por essa potência. Também vale a observação de termos um argumento fora do intervalo $-\pi < n\theta < \pi$, isto é, devemos eliminar um múltiplo inteiro de 2π radianos.

EXEMPLO 4.13. POTÊNCIA DE UM NÚMERO COMPLEXO

Calcule: a) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{2018}$ e b) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{-2018}$

Com esses cálculos fica clara a importância de se efetuar a potenciação na forma trigonométrica, pois, caso contrário, deveríamos efetuar mais de dois mil produtos. Então, primeiramente, vamos escrever o número complexo na forma trigonométrica. Temos $\cos\theta = \sqrt{3}/2$ e $\operatorname{sen}\theta = 1/2$ de onde segue $\theta = \pi/6$ radianos. Por outro lado, o módulo é tal que $r = \sqrt{(\sqrt{3}/2)^2 + (1/2)^2} = 1$. Logo, a forma trigonométrica é dada por

$$\frac{\sqrt{3}+i}{2} = 1 \cdot (\cos\pi/6 + i \operatorname{sen}\theta/6) = \cos\pi/6 + i \operatorname{sen}\theta/6.$$

A fim de elevar à potência 2018, basta elevar o módulo que será unitário e o argumento

$$2018 \cdot \pi/6 = 168 \cdot 2\pi + \frac{2\pi}{6}$$

isto é, vamos eliminar um múltiplo inteiro de 2π radianos (cento e sessenta e oito) de modo que o argumento, correspondendo ao produto $n\theta$, é dado por $\pi/3$ radianos. Segue, então,

$$\text{a)} \quad (\cos\pi/3 + i \operatorname{sen}\pi/3) \qquad \text{e} \qquad \text{b)} \quad [\cos(-\pi/3) + i \operatorname{sen}(-\pi/3)]$$

ou ainda, voltando à forma algébrica temos

$$\text{a)} \quad \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \qquad \text{e} \qquad \text{b)} \quad \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

4.2.4 Radiciação na forma trigonométrica

A chamada segunda fórmula de de Moivre permite obter a raiz enésima de um número complexo

$$\sqrt[n]{r \cdot (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)}$$

isto é, obter números complexos z tais que $z^n = r \cdot (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$. Sejam $w = \rho \cdot (\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$ as raízes enésimas de z, logo $z = w^n$. Utilizando a primeira fórmula de de Moivre, podemos escrever a igualdade

$$\rho^n \cdot (\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha) = r \cdot (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta).$$

Visto que dois números complexos iguais têm módulos iguais e argumentos congruentes, obtemos

$$\rho = \sqrt[n]{r} \qquad \text{e} \qquad \alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

com $k = 0, 1, 2, \ldots (n-1)$. Dessas duas expressões podemos concluir que as raízes têm o mesmo módulo e que os argumentos crescem em progressão aritmética cuja razão é $2\pi/n$.

Então, a segunda fórmula de de Moivre é dada por

$$w_k = \sqrt[n]{r} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right] \tag{4.6}$$

com $k = 0, 1, 2, \ldots (n-1)$.

EXEMPLO 4.14. RAÍZES ENÉSIMAS DA UNIDADE

Seja $n \in \mathbb{N}$. Resolva a equação $z^n = 1$.

Escrevendo a unidade na forma trigonométrica temos: $z = \cos 0 + i\,\mathrm{sen}\,0$. Por outro lado, $\sqrt[n]{1} = 1$ de onde segue para as raízes

$$w_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

com $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

O lugar geométrico das raízes enésimas da unidade são os vértices, também chamados afixos, de um n-ágono regular inscrito em uma circunferência com centro na origem e raio unitário.

EXEMPLO 4.15. BARICENTRO DE UM TRIÂNGULO

Considere um triângulo ABC de lados AB, BC e CA. Construímos os triângulos semelhantes (com mesma orientação) ADB, BEC e CFA. Mostrar que os triângulos ABC e DEF têm o mesmo baricentro, ponto de encontro das medianas, segmento de reta que o une o lado ao vértice oposto [2].

A fim de simplificar a notação, denotemos, cada um dos vértices, tendo coordenada a respectiva letra minúscula, isto é, vértice A, coordenada a, vértice B, coordenada b e assim com os demais. Visto que os triângulos ADB, BEC e CFA são triângulos semelhantes com mesma orientação, podemos escrever

$$\frac{d-a}{b-a} = \frac{e-b}{c-b} = \frac{f-c}{a-c} = k$$

onde k é uma constante.

Das igualdades anteriores, podemos escrever para os lados do triângulo DEF

$$d = a + (b-a)k, \qquad e = b + (c-b)k, \qquad f = c + (a-c)k\cdot$$

Seja q a coordenada do baricentro, Q. Da definição de baricentro, temos

$$q = \frac{1}{3}(d + e + f)$$

que, substituindo os valores de d, e e f e simplificando, permite escrever

$$q = \frac{1}{3}(a + b + c)$$

ou seja, os dois triângulos possuem o mesmo baricentro.

EXEMPLO 4.16. POLÍGONOS INSCRITOS NUMA CIRCUNFERÊNCIA

O número de vértices em comum dos dois polígonos regulares é dado pelo número de raízes (afixos) comuns

$$z^{2018} = 1 \qquad \text{e} \qquad z^{2019} = 1.$$

Uma vez que queremos o número de vértices em comum, basta considerarmos o máximo divisor comum, isto é, $\mathrm{mdc}(2018, 2019)$ que é igual a um, pois os números são primos entre si. Logo, existe apenas um vértice em comum, isto é, $z = 1$ é raiz de ambas.

Em geral, pode-se mostrar que as raízes comuns de $z^n = 1$ e $z^m = 1$ são as raízes de $z^\ell = 1$ onde $\ell = \mathrm{mdc}(m, n)$, isto é, o máximo divisor comum.

4.3 Exercícios

1. Sejam $x, y \in \mathbb{R}_+$. Escreva a forma algébrica mais geral para um número complexo em cada um dos quadrantes.
2. Utilizando os números do EXEMPLO 4.5, mostre que $z_1/z_2 = 1/(z_2/z_1)$.
3. (CPEG/64) Calcule $\sqrt{45 + 28i}$.
4. Determine o lugar geométrico das imagens do complexo $\mathrm{Im}(z) > 1$.
5. Mostre que $(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta$
6. (Competição Americana de Matemática 12A, 2002 - Adaptado.) Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Encontre o número de pares ordenados (x, y) de números reais tais que $(x + iy)^{2018} = x - iy$.
7. Resolva em $\mathbb{C}$ a equação $z^4 - 3(1 + 2i)z^2 = 8 - 6i$.
8. Mostre que $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$ e $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$
9. Utilizando o anterior expresse $\cos 6\theta$ em função do arco simples.
10. Mostre que $|\sqrt[3]{23 + 10\sqrt{2}i}| = 3$.
11. Obtenha a raiz quadrada de $z = 21 - 20i$.
12. Prove que se $|z_1| = |z_2| = 1$ e $z_1 \neq -1/z_2$ então $\Lambda = \dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ é real.
13. Considere a equação $z^2 - 8(1 - i)z + 63 - 16i = 0$. Sendo z_1 e z_2 suas raízes, mostre que o triplo da raiz de menor módulo, adicionada à outra é um número real.
14. (Fuvest/96-Adaptado) Seja $z = \sqrt{3} + i$. Determine o menor valor do inteiro $n \geq 1$ para o qual z^n é um número real.
15. (Fuvest/95-Adaptado) Sabendo que $\alpha \in \mathbb{R}$ e que a parte imaginária do número complexo $(2 + i)/(\alpha + 2i)$ é zero, obtenha α.
16. (Fuvest/94-Adaptado) Mostre que $z = \cos 4\pi/15 + i \operatorname{sen} 4\pi/15$ é raiz da seguinte equação $z^{10} + z^5 + 1 = 0$.

17. (Unicamp/94) Seja $\alpha \neq -1$ um número complexo tal que $\alpha^n = 1$, onde n é um número inteiro positivo. Prove que, se n for par, a expressão

$$1 - \alpha + \alpha^2 - \alpha^3 + \cdots + (-\alpha)^n$$

é igual a 1; e, se n for ímpar, essa expressão é igual a $(1-\alpha)/(1+\alpha)$.

18. (ITA/96-Adaptado) Calcule o valor de $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{93}$.

19. (ITA/95-Adaptado) Seja z um número complexo satisfazendo $\mathrm{Re}(z) > 0$ e $(\bar{z}+i)^2 = 1$. Determinar o menor natural n para o qual z^n é um imaginário puro.

20. (ITA/94-Adaptado) Justifique que apenas quatro das afirmações a seguir são verdadeiras;

    a) $(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^{10} = \cos 10\theta + i\,\mathrm{sen}\,10\theta,$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

    b) $(5i)/(2+i) = 1+2i$.

    c) $(1-i)^4 = -4$.

    d) Se $z^2 = (\bar{z})^2$ então z é real ou imaginário puro.

    e) O polinômio $x^4 + x^3 - x - 1$ possui apenas raízes reais.

21. (FGV/95-Adaptado) Seja o número complexo $z = (x-2i)^2$, no qual $x \in \mathbb{R}$. Se o argumento principal de z é $\pi/2$ radianos, determine $1/z$.

22. Sejam $z_1 = (-1,0)$, $z_2 = (0,1)$ e $z_3 = (1,2)$. Calcule: a) $z_1 + z_2 + z_3$ e b) $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$.

23. Seja $z = 1-i$. Calcular z^n com n inteiro positivo.

24. Seja $z \neq 0$. Encontre z tal que $z + z^{-1}$ seja real.

25. Determine os complexos tais que $z^2 + 2|z|^2 - 2 = 0$.

26. Seja $z \in \mathbb{C}$. Resolva a equação $|z| - 2z = 3 - 4i$.

27. Sejam z_1 e z_2 as raízes da equação $z^2 - z + 1 = 0$, com os argumentos satisfazendo a desigualdade $\theta_1 > \theta_2$. Calcule
$$\Lambda = z_1^{2018} + z_2^{2019}.$$

28. Encontre o lugar geométrico para: a) $|z+1| = 3$ e b) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z+1}{z-2}\right) = 0$.

29. Calcule $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2018}$.

30. Determine o módulo e o argumento de $z = (1+i\sqrt{3})^3 + (1-i\sqrt{3})^3$.

31. Escreva os números complexos na forma trigonométrica

$$\text{a)} \quad z_1 = -2i \qquad\qquad \text{e} \qquad\qquad \text{b)} \quad z_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}.$$

32. Calcule as raízes cúbicas de $z = i$.

33. Determine $\alpha \in \mathbb{R}$, se existir, a fim de que a fração $(\alpha - i)/(1 + \alpha i)$ seja um número: a) real e b) imaginário puro.

34. Resolva a equação $z^4 + 625 = 0$.

35. Determine z sabendo que $|z| = \frac{1}{|z|} = |z - 1|$.

36. Mostre as expressões para o cosseno e o seno do arco triplo

$$\begin{array}{lrcl} \text{a)} & \cos 3x & = & 4\cos^3 x - 3\cos x \\ \text{b)} & \operatorname{sen} 3x & = & 3\operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen}^3 x. \end{array}$$

37. Sendo $a, b \in \mathbb{R}$, obtenha uma relação entre os argumentos dos seguintes números complexos $z_1 = -a + bi$ e $z_2 = a - bi$.

38. Seja $x \in \mathbb{R}$. Admita as expressões que explicitam o cosseno e o seno em termos das exponenciais complexas

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen} x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

de modo a mostrar que i^i é um número real.

39. Determine o módulo de $z = \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2018}$.

40. Determine o argumento de z sabendo que $\overline{z} = \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2018}$.

41. Obtenha $a \in \mathbb{R}$, se existir, satisfazendo $|i + a| = a\sqrt{2}$.

42. Determine, se existirem, números reais a e b tais que $z_1 = \sqrt{a+i}$ e $z_2 = bi$ sejam iguais.

43. Encontre as raízes quadradas, denotadas por w_1 e w_2, do número complexo $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

44. Mostre que $\Omega = (3+4i)^{2019} + (3-4i)^{2019}$ é um número real.

45. Determine o lugar geométrico dos pontos tal que

$$\left|\frac{z + z^{-1}}{2}\right| = 1.$$

46. Calcule $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2019}$.

47. Considere $z \in \mathbb{C}$ e $\Xi = \dfrac{z^2 + z + 1}{z^2 - 2z + 1}$ um número real. Mostre que $|z| = 1$.

48. Seja $z = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$ e $z \neq 1$. Mostre que $\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{1-z}\right) = \dfrac{1}{2}$.

49. Seja $z = -8 - 8\sqrt{3}i$. Determine $\sqrt[4]{z}$.

50. (ITA/2018) Seja $z = \cos\frac{\pi}{7} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{7}$. Pedem-se: a) Use a propriedade

$$z^k = \cos\frac{k\pi}{7} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{k\pi}{7}$$

com $k \in \mathbb{N}$ para expressar $\cos\frac{\pi}{7}, \cos\frac{3\pi}{7}$ e $\cos\frac{5\pi}{7}$ em função de z. b) Determine inteiros a e b tais que

$$\frac{a}{b} = \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}.$$

4.3.1 Respostas e/ou sugestões

1. IQ. $x + yi$, IIQ. $-x + yi$, IIIQ. $-x - yi$ e IVQ. $x - yi$.

2. Basta calcular o inverso de um deles e verificar que fornece o outro.

3. $\pm 7 \pm 2i$

4. $\{y \in \mathbb{R} : y > 1\}$

5. Para $n = 0$ e $n = 1$ é imediato. Para $n \geq 2$ basta utilizar a fórmula da multiplicação. Por outro lado, para mostrar que vale para os negativos, considere $n = -\ell$ e utilize a fórmula da divisão.

6. 2020

7. $z_1 = 2 + i$, $z_2 = -2 - i$, $z_3 = 1 + i$ e $z_4 = -1 - i$.

8. Considere $|z| = r = 1$ e utilize a fórmula de de Moivre.

9. $\cos 6\theta = 32\cos^6\theta - 48\cos^4\theta + 18\cos^2\theta - 1$.

10. Use o resultado de que o módulo da raiz cúbica é a raiz cúbica do módulo.

11. $\pm(5 - 2i)$.

12. Utilize a forma trigonométrica a fim de mostrar que Λ é igual ao seu complexo conjugado.

13. Mostre que as raízes são: $z_1 = 5 - 12i$ e $z_2 = 3 + 4i$ e conclua o exercício.

14. Escreva na forma trigonométrica para mostrar que o menor valor é 6.

15. Multiplique numerador e denominador pelo conjungado do denominador para mostrar que $\alpha = 4$.

16. Utilize a fórmula de de Moivre.

17. Utilize a expressão para a soma dos termos de uma progressão geométrica com $n + 1$ termos.

18. $(-1 + i)/\sqrt{2}$.

19. 2.

20. Apenas a última é falsa.

21. $-i/8$.

22. a) $3i$ e b) $2-i$.

23. $2^{n/2}\left[\cos(n\pi/4)-i\,\mathrm{sen}(n\pi/4)\right]$.

24. São pontos da circunferência de equação $x^2+y^2=1$ ou tais que $z=\exp(i\theta)$.

25. $(0,-\sqrt{2}),(0,\sqrt{2}),(\sqrt{6}/3,0),(-\sqrt{6}/3,0)$.

26. $z_1=-2+\sqrt{21}/3+2i$ e $z_2=-2-\sqrt{21}/3+2i$.

27. $(-3+i\sqrt{3})/2$.

28. Circunferências de equações: a) $(x+1)^2+y^2=9$ e b) $(x-1/2)^2+y^2=9/4$.

29. i.

30. -16.

31. a) $z=2\left(\cos 3\pi/2+i\,\mathrm{sen}\,3\pi/2\right)$. b) $z=\cos\pi/3+i\,\mathrm{sen}\,\pi/3$.

32. $z_1=-i$; $z_2=\cos 5\pi/6+i\,\mathrm{sen}\,5\pi/6$; $z_3=\cos\pi/6+i\,\mathrm{sen}\,\pi/6$.

33. a) $\nexists\alpha$; b) Qualquer $\alpha\neq-1$.

34. $z=5\left[\cos(\pi+2k\pi)/4+i\,\mathrm{sen}(\pi+2k\pi)/4\right]$ com $k=0,1,2,3$.

35. $z_1=(1+i\sqrt{3})/2$ e $z_2=(1-i\sqrt{3}/2$.

36. Utilize a fórmula de de Moivre e separe as partes real e imaginária.

37. A diferença dos argumentos é um múltiplo de π.

38. Utilize a forma algébrica para obter $e^{-\pi/2}$.

39. 1.

40. π radianos.

41. $a=\pm1$.

42. $\nexists a,b$.

43. $\pm\left(\dfrac{b}{\Delta\sqrt{2}}+i\dfrac{\Delta}{\sqrt{2}}\right)$ sendo $\Delta=\sqrt{-a+\sqrt{a^2+b^2}}$.

44. Mostre que Ω é igual ao seu complexo conjugado.

45. União das circunferências de equações $x^2+(y-1)^2=2$ e $x^2+(y+1)^2=2$.

46. $-(1+i)/\sqrt{2}$.

47. Note que: soma, subtração, multiplicação e divisão de um número real por um outro número real é um número real e, ainda mais, na divisão, esse outro número deve ser diferente de zero. Divida numerador por denominador e mostre que $z/(z^2-z+1)$ é um número real, ou ainda que $z+1/z$ é um número real.

48. Sendo $|z|=1$, multiplique numerador e denominador pelo conjugado do denominador e simplifique.

49. $w_k = 2(\cos\pi/3 + i\,\mathrm{sen}\,\pi/3)(i)^k$ com $k=0,1,2,3$.

50. a) Para cada um dos cossenos solicitados, substitua dois valores de k de modo que ao adicionar os dois cossenos, a parte imaginária cancele. Mostre que $\cos\dfrac{\pi}{7} = \dfrac{z+z^{13}}{2}$, $\cos\dfrac{3\pi}{7} = \dfrac{z^3+z^{11}}{2}$ e $\cos\dfrac{5\pi}{7} = \dfrac{z^5+z^9}{2}$. b) Utilizando o item anterior e a identidade

$$\frac{z^{15}-z}{z^2-1} = z^{13}+z^{11}+z^9+z^7+z^5+z^3+z$$

expresse o quociente em termos de $z^{14}=1$ e $z^7=-1$ a fim de concluir que $a/b=1/2$.

Capítulo 5

Polinômios e equações algébricas

Obter a expressão para as raízes da equação algébrica de grau três.

Vamos dividir esse capítulo em duas seções, uma dedicada aos polinômios e suas propriedades, e a outra dedicada às equações algébricas e respectivas soluções.

5.1 Polinômios

Vamos introduzir o conceito de polinômio de uma variável real para, ao final estendermos o conceito para os complexos, visando o estudo das equações algébricas onde, eventualmente, as raízes podem ser complexas.

DEFINIÇÃO 5.1.1. POLINÔMIO NA VARIÁVEL $x \in \mathbb{R}$

Chama-se polinômio real de uma variável, x, aos polinômios algébricos, racionais e inteiros, de grau n, denotado por $P(x)$ na forma

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$, todos pertencentes aos reais, são os chamados coeficientes. Podemos pensar como uma soma de monômios, escrita em ordem decrescente. Note que para o grau ser n, o coeficiente $a_0 \neq 0$.

DEFINIÇÃO 5.1.2. POLINÔMIO IDENTICAMENTE NULO

Dizemos que um polinômio é identicamente nulo, denotado por $P(x) \equiv 0$, aquele cujos coeficientes são todos nulos, isto é, o valor numérico é zero.

DEFINIÇÃO 5.1.3. POLINÔMIOS IDÊNTICOS

Dois polinômios de uma variável x, denotados por $P_1(x)$ e $P_2(x)$, de mesmo grau, são idênticos, $P_1(x) \equiv P_2(x)$ se, e somente se, os coeficientes de seus termos de mesmo grau são iguais.

Através de exemplos, vamos introduzir o chamado método de Descartes, também conhecido pelo nome de coeficientes a determinar, pois será de grande utilidade nos próximos capítulos, em uma ou mais de suas vertentes, dentre elas, decomposição de expressões em termos de outras, determinação do quociente e do resto da divisão, divisibilidade, decomposição em frações parciais, uma vez que todas essas vertentes se reduzem à definição e à igualdade de polinômios.

EXEMPLO 5.1. DECOMPOSIÇÃO DE UMA EXPRESSÃO EM TERMOS DE OUTRAS

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Escrever o binômio $2ax+b$ como a diferença de dois quadrados. Devemos determinar A e B de modo que tenhamos

$$2ax+b = (x-A)^2 - (x-B)^2.$$

Da identidade de polinômios $2ax+b = x^2 - 2Ax + A^2 - x^2 + 2Bx - B^2$ de onde segue o sistema

$$\begin{cases} B-A &= a \\ A^2-B^2 &= b \end{cases}$$

com solução dada por $A = -(a^2+b)/2a$ e $B = (a^2-b)/2a$ de onde segue

$$2ax+b = \left(x + \frac{a^2+b}{2a}\right)^2 - \left(x - \frac{a^2-b}{2a}\right)^2$$

isto é, o binômio expresso em termos de uma diferença de quadrados.

EXEMPLO 5.2. PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA DIVISÃO

Determinar o quociente e o resto da divisão de $P(x)$, de grau n, por $D(x)$, de grau $m < n$. O grau do quociente, denotado por $Q(x)$, será tal que $n-m$ enquanto o resto $R(x)$ terá grau, no máximo, igual a $m-1$. Vamos exemplificar com a divisão de $2x^5 + 3x^3 + 19$ por $x^3 + 2x - 1$. Nesse caso temos $n = 5$ e $m = 3$ logo o grau do quociente será igual a dois, portanto, será um polinômio de grau dois que, na forma mais geral, é dado por: $ax^2 + bx + c$ onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ devem ser determinados e o resto terá a forma $dx^2 + ex + f$ com $d, e, f \in \mathbb{R}$ também devem ser determinados. Então, utilizando o princípio fundamental da divisão,

$$\text{Dividendo} \equiv \text{Divisor} \cdot \text{Quociente} + \text{Resto}$$

podemos escrever $P(x) \equiv D(x) \cdot Q(x) + R(x)$ que, em nosso caso, é

$$2x^5 + 0x^4 + 3x^3 + 0x^2 + 0x + 19 \equiv (x^3 + 0x^2 + 2x - 1) \cdot (ax^2 + bx + c) + (dx^2 + ex + f)$$

onde inserimos os zeros de modo que fique caracterizado o polinômio completo, em ordem decrescente, a partir do grau. Utilizando a propriedade distributiva e a identidade de polinômios obtemos o sistema

$$\begin{cases} 2 &= a \\ 0 &= b \\ 3 &= c+2a \\ 0 &= 2b-a+d \\ 0 &= 2c-b+e \\ 19 &= -c+f \end{cases}$$

com solução dada por $a = 2$, $b = 0$, $c = -1$, $d = 2$, $e = 2$ e $f = 18$. Seguem o quociente e o resto

$$Q(x) = 2x^2 - 1 \qquad \text{e} \qquad R(x) = 2x^2 + 2x + 18$$

respectivamente.

Uma outra vertente da divisibilidade é procurar coeficientes impondo que, por exemplo, o resto é nulo ou um outro valor qualquer, bem como uma condição a fim de que com a identidade de polinômios, os coeficientes que estão faltando, sejam determinados. Concluímos a metodologia de Descartes com o que é conhecido com o nome de frações parciais, importantíssimo na resolução de integrais, conforme Capítulo 9.

EXEMPLO 5.3. FRAÇÕES PARCIAIS

Expresse o quociente $12/(x^3-2x^2-3x)$ como uma soma de frações. Ressalte-se que, nesse caso, o grau do numerador deve ser menor que o grau do denominador. Caso contrário, deve-se efetuar a divisão utilizando o princípio fundamental da divisão para, após, proceder com o método, isto é, escrever a fração como uma soma de outras frações, as chamadas frações parciais.

Começamos por fatorar o denominador $x^3-2x^2-3x = x(x-3)(x+1)$. Note que, aqui são todos de primeiro grau. Se esse não fosse o caso, deveríamos proceder de outra maneira que será apresentada a seguir. É importante notar que o grau do denominador de cada uma das frações parciais seja maior em uma unidade ao do respectivo numerador. Nesse exemplo, vamos determinar as constantes A,B,C de modo que tenhamos

$$\frac{12}{x^3-2x^2-3x} = \frac{12}{x(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+1}.$$

Reduzindo ao mesmo denominador, cancelando-os (primeiro e segundo membros, são iguais) e reagrupando os termos no segundo membro, podemos escrever

$$12 = (A+B+C)x^2 + (-2A+B-3C)x + (-3A).$$

Da identidade de polinômios obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} 0 &= A+B+C \\ 0 &= -2A+B-3C \\ 12 &= -3A \end{cases}$$

com solução dada por $A=-4$, $B=1$ e $C=3$ de onde seguem as frações parciais

$$\frac{12}{x^3-2x^2-3x} = -\frac{4}{x} + \frac{1}{x-3} + \frac{3}{x+1}.$$

EXEMPLO 5.4. FRAÇÕES PARCIAIS

Em analogia ao anterior, expressar $1/(x^3+x)$ como frações parciais.

Novamente, começamos por fatorar o denominador $x^3+x = x(x^2+1)$. Aqui, temos um monômio de grau um e um binômio de grau dois. Devemos, então, escrever as frações parciais como

$$\frac{1}{x^3+x} = \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

onde A,B,C devem ser determinados. Note que as duas frações no segundo membro têm a mesma diferença de grau do denominador e numerador, isto é, na primeira grau zero no numerador e grau um no denominador, enquanto na segunda fração grau um no numerador e dois no denominador logo, a mesma diferença.

Reduzindo ao mesmo denominador, cancelando-os (primeiro e segundo membros, são iguais) e reagrupando os termos no segundo membro, podemos escrever

$$1 = (A+B)x^2 + Cx + A.$$

Da identidade de polinômios obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} 0 &= A+B \\ 0 &= C \\ 1 &= A \end{cases}$$

com solução dada por $A = 1$, $B = -1$ e $C = 0$ de onde seguem as frações parciais

$$\frac{1}{x^3+x} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}.$$

Esses exemplos que foram discutidos se resumem no fato de que dois polinômios são idênticos se, e só se, os coeficientes de seus termos de mesmo grau são iguais. Alternativamente, poderíamos procurar coeficientes de modo que o polinômio fosse identicamente nulo. Em resumo, todos os exemplos do método de Descartes confluem para a resolução de um sistema envolvendo os coeficientes. Vamos voltar neste tema no Capítulo 7.

A fim de concluírmos a seção, mencionamos a divisão de um polinômio por um binômio da forma $x-a$, pois nesse caso, através de um teorema, podemos obter diretamente o resto dessa divisão.

TEOREMA 5.1.1. TEOREMA DO RESTO. *O resto da divisão de um polinômio $P(x)$ por $x-a$ é igual ao valor numérico desse polinômio para $x = a$, isto é, $P(a)$.*

Ainda mais, note que nesse caso o resto é um número, pois o divisor é um polinômio de grau um. Apesar de não discutirmos, mencionamos a existência de um dispositivo prático, chamado dispositivo ou algoritmo de Briot-Ruffini [6], que simplifica a divisão de um polinômio por $x-a$ a fim de que obtenhamos o quociente e o resto.

EXEMPLO 5.5. RESTO DA DIVISÃO POR $x-a$

Determine os valores de a,b no polinômio $P(x) = x^5+2x^4+ax^2+bx-3$ de modo que seja divisível por x^2-2x-3.

É claro que poderíamos proceder com o uso do princípio da divisão e a identidade de polinômio, porém vamos utilizar o Teorema 5.1.1. Um polinômio é divisível por um produto então ele é divisível pelos fatores, isto é, nesse caso, estamos impondo que é divisível por x^2-2x-3 então ele é divisível por $x-1$ e por $x+3$. Logo, utilizando o Teorema 5.1.1 no primeiro caso, isto é, impondo $P(1) = 0$ enquanto no segundo $P(-3) = 0$, segue o seguinte sistema

$$\begin{cases} a+b &= 0 \\ 9a-3b &= 84 \end{cases}$$

com solução dada por $a = 7$ e $b = -7$, que são os valores de a e b a fim de que o polinômio seja divisível pelo produto $(x-1)(x+3) = x^2-2x-3$.

5.2 Equações algébricas

Vamos estudar as equações algébricas restringindo-as ao caso onde os coeficientes são reais e temos apenas uma incógnita. Uma equação algébrica é aquela em que a incógnita está submetida apenas a operações algébricas, caso contrário, transcendentes, as quais fogem do escopo desse trabalho. Como é sabido, equações de grau maior ou igual a cinco, exceto casos particulares, não apresentam uma fórmula para determinarmos as raízes, como é o caso das equações do segundo, terceiro e quarto graus, apesar de serem as de terceiro e quarto graus, muito complicadas de se trabalhar. Enfim, aqui vamos discutir apenas equações que não necessitam de métodos numéricos, ou seja, discutimos apenas métodos analíticos. Com essa ressalva, apesar de uma grande simplificação, vamos discutir a teoria baseada no teorema de d'Alembert. Esse teorema garante que uma equação algébrica, com coeficientes reais, admite pelo menos uma raiz, seja ela real ou complexa, conhecido pelo nome de princípio fundamental das equações algébricas.

DEFINIÇÃO 5.2.1. EQUAÇÃO ALGÉBRICA

Uma equação algébrica, escrita na chamada forma canônica, é dada por

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = 0 \tag{5.1}$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$, todos pertencentes aos reais e $a_0 \neq 0$, são os chamados coeficientes. Os números que tornam essa identidade verdadeira são chamados de raízes da equação algébrica.

DEFINIÇÃO 5.2.2. DECOMPOSIÇÃO EM FATORES $x - x_i$

Utilizando a Eq.(5.1) e de acordo com o princípio fundamental, existe ao menos uma raiz x_i da equação $f(x) = 0$, sendo $i = 1, 2, \ldots, n$ o grau da equação

$$f(x) = a_0(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \cdots \cdot (x - x_n)$$

isto é, um polinômio racional inteiro de grau n pode ser decomposto, a menos de um fator diferente de zero, a_0, no produto de n binômios da forma $x - x_i$, sendo x_i um número real ou complexo.

EXEMPLO 5.6. RESOLVER A EQUAÇÃO $x^3 - 15x - 4 = 0$

Esse é um tipo de equação que foi discutido no século XVI com as célebres disputas de matemáticos famosos, Cardano, Tartaglia e Ferrari, dentre outros. Sabia-se que $x = 4$ é uma raiz, conforme pode ser verificado por inspeção, enquanto as outras duas podem ser determinadas por redução do grau, como vamos ver a seguir. O importante é que quando se usa a fórmula para obter as raízes cúbicas dessa equação aparece um discriminante negativo sob uma raiz quadrada.

Como já mencionamos, $x_1 = 4$ é raiz, pois substituindo $x_1 = 4$ na equação resulta numa identidade. Determinar uma raiz por inspeção é importante pois o grau da equação, após a divisão por $x - 4$ reduz a equação à uma outra equação, aqui, do segundo grau, isto é, podemos escrever

$$x^3 - 15x - 4 = (x - 4)(x^2 + 4x + 1).$$

Devemos determinar as outras duas raízes, pois o grau da equação é três, logo resolver a equação quadrática

$$x^2 + 4x + 1 = 0$$

cujas raízes são $x_2 = -2 - \sqrt{3}$ e $x_3 = -2 + \sqrt{3}$. Então, as três raízes da equação do terceiro grau são $x_1 = 4$, $x_2 = -2 - \sqrt{3}$ e $x_3 = -2 + \sqrt{3}$.

EXEMPLO 5.7. DIMENSÕES DE UM PARALELEPÍPEDO

A partir de uma cartolina retangular de dimensões 24 cm e 18 cm, retiram-se quatro quadrados, um de cada canto. Quanto deve medir o lado do quadrado de modo que o volume de uma caixa, sem tampa, conforme a Figura 5.1, seja 560 cm^3? A solução é única?

Seja ℓ o lado dos quadrados que serão retirados. Então, da Figura 5.1 temos que as dimensões do paralelepípedo são $24 - 2\ell$, $18 - 2\ell$ e ℓ, cujo volume, calculado pela expressão do volume de um paralelepípedo, é tal que podemos escrever

$$V = \ell \cdot (24 - 2\ell) \cdot (18 - 2\ell) = 560$$

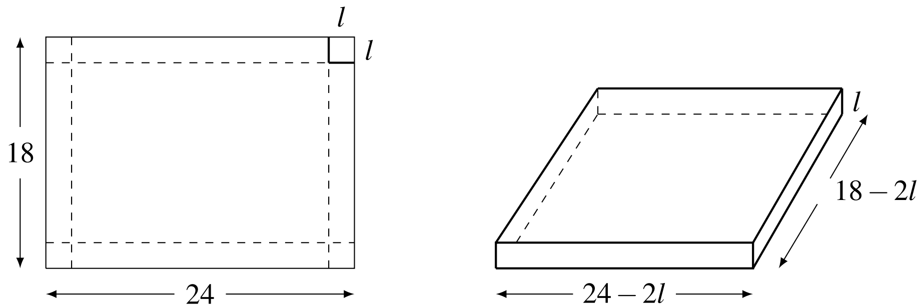


Figura 5.1: Caixa com forma de parelelepípedo.

que pode ser manipulado a fim de deixar na forma de uma equação canônica

$$x^3 - 21x^2 + 108x - 140 = 0.$$

Por inspeção $x_1 = 2$ é raiz. Procedendo como no anterior escrevemos

$$x^3 - 21x^2 + 108x - 140 = (x-2)\cdot(x^2 - 19x - 70) = (x-2)\cdot(x-5)\cdot(x-14)$$

pois $x = 5$ e $x = 14$ são as raízes da equação do segundo grau. Visto que estamos considerando medidas relativas ao paralelepípedo, devemos descartar $x = 14$, pois ao substituir nas dimensões do paralelepípedo estas resultam negativas. Então, para $x = 2$, temos a altura $\ell = 2$, a largura igual a $18 - 2\ell = 14$ e o comprimento igual a $24 - 2\ell = 20$ enquanto para $x = 5$, temos a altura $\ell = 5$, a largura igual a $18 - 2\ell = 8$ e o comprimento igual a $24 - 2\ell = 14$. Em resumo, podemos ter dois tipos de caixa com o mesmo valor do volume.

5.2.1 Relações entre coeficientes e raízes

Como já mencionamos, uma equação algébrica racional inteira, na incógnita x, com coeficientes reais e grau n, na forma canônica é

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = 0$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$, são os coeficientes e $a_0 \neq 0$. Por outro lado, podemos fatorar e escrevê-la na forma

$$a_0(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\cdots\cdot(x-x_n) = 0 \tag{5.2}$$

onde x_i com $i = 1, 2, \ldots, n$ são as raízes. Efetuando o produto dos n binômios e identificando com a forma canônica, obtemos relações envolvendo as raízes e os coeficientes, às vezes chamadas de relações de Girard

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= -a_1/a_0 \\
x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots x_{n-1}x_n &= a_2/a_0 \\
x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n &= -a_3/a_0 \\
\vdots \quad &\ \vdots \quad \vdots \\
x_1x_2x_3\cdots x_n &= (-1)^n a_n/a_0.
\end{aligned}$$

Convém ressaltar que essas relações, por si só, não resolvem a equação algébrica. Se houver uma relação entre as raízes essas equações podem contribuir para a solução ou mesmo baixar o grau da equação. Ainda mais, essas equações prestam-se para compor uma equação, conhecidas as raízes. É claro que, na composição da equação pode-se, também, utilizar a forma fatorada de modo que após as multiplicações basta rearranjar os coeficientes com os respectivos expoentes de x deixando-os na forma decrescente, isto é, na forma canônica.

EXEMPLO 5.8. RELAÇÕES DE GIRARD

Obter as relações de Girard para à equação $x^3-21x^2+108x-140=0$. Sejam x_1, x_2 e x_3 as raízes da equação e $a_0=1$, $a_1=-21$, $a_2=108$ e $a_3=-140$ os respectivos coeficientes. As relações de Girard constituem o seguinte sistema de três equações a três incógnitas

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2+x_3 & = & 21 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 & = & 108 \\ x_1x_2x_3 & = & 140\cdot \end{array}\right.$$

Visto que não temos uma condição adicional, não é possível determinar as três raízes a partir desse sistema. Se, por outro lado, conhecemos uma condição, a solução torna-se possível. Por exemplo, resolva o sistema sabendo que o produto de duas raízes é igual a 70. Com esse dado, escrevemos $x_1x_2=70$ e a partir da terceira equação concluímos que $x_3=14$. Resta-nos, então o seguinte sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2 & = & 7 \\ x_1x_2 & = & 10 \end{array}\right.$$

de solução imediata, $x_1=2$ e $x_2=5$.

TEOREMA 5.2.1. *Sejam $x,y\in\mathbb{R}$ e $b\neq 0$. Se o número complexo $x+iy$ é uma raiz de uma equação algébrica com coeficientes reais, então seu complexo conjugado $x-iy$ também é raiz da equação, tendo a mesma multiplicidade.*

Esse teorema garante que as raízes não reais de equações algébricas com coeficientes reais ocorrem aos pares. Como uma consequência, toda equação algébrica com coeficientes reais de grau ímpar, tem pelo menos uma raiz real.

EXEMPLO 5.9. EQUAÇÃO A PARTIR DAS RAÍZES

Escreva uma equação algébrica com coeficientes reais de menor grau sabendo que $x_1=-1$ e $x_2=1+i$ são raízes.

Visto que a equação deve ter coeficientes reais e sabendo que $x_2=1+i$ é uma raiz concluímos que o seu conjugado $x_3=1-i$ também é raiz (as raízes complexas encontram-se aos pares, desde que a equação algébrica tenha coeficientes reais). Por outro lado, como queremos a de menor grau e são três as raízes, a equação deve ser de grau três, logo podemos escrever

$$(x+1)(x-1-i)(x-1+i)=0$$

que, na forma canônica, é dada por $x^3-x^2+2=0$.

EXEMPLO 5.10. (BÉLGICA/2006). RELACIONANDO COM A TRIGONOMETRIA.

a) Encontre todos os números reais α tais que $\cos(4\alpha) = \cos(3\alpha)$. b) Determine a, b, c, d tais que $\cos(2\pi/7)$, $\cos(4\pi/7)$ e $\cos(6\pi/7)$ sejam soluções (raízes) da equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

a) Devemos resolver a equação $\cos(4\alpha) = \cos(3\alpha)$. Duas linhas trigonométricas associadas ao cosseno são iguais se, e somente se, os arcos satisfazem as equações: Os arcos côngruos são $4\alpha = 3\alpha + 2k\pi$ com $k = 0, 1, 2, \ldots$ ou replementares, isto é, satisfazem $4\alpha = -3\alpha + 2k\pi$ com $k = 0, 1, 2, \ldots$ Então, as soluções 1, $\cos(2\pi/7)$, $\cos(4\pi/7)$ e $\cos(6\pi/7)$ satisfazem a igualdade de dois cossenos.

b) Usando a expressão que exprime o cosseno do arco quádruplo em função do cosseno do arco, e a expressão para o arco triplo, podemos escrever: $\cos(4\alpha) = 8 \cdot \cos^4\alpha - 8 \cdot \cos^2\alpha + 1$ e $\cos(3\alpha) = 4 \cdot \cos^3\alpha - \cos\alpha$. Introduzindo o parâmetro $\xi = \cos\alpha$ obtemos, a partir da equação trigonométrica do item anterior

$$(\xi - 1) \cdot (8\xi^3 + 4\xi^2 - 4\xi - 1) = 8 \cdot \xi^4 - 4 \cdot \xi^3 - 8 \cdot \xi^2 + 3 \cdot \xi + 1 = 0.$$

É imediato verificar que $\xi = 1$ é solução da equação de quarto grau, logo os coeficientes procurados são $a = 8$, $b = 4$, $c = -4$ e $d = -1$, pois essa equação cúbica tem como raízes $\cos(2\pi/7)$, $\cos(4\pi/7)$ e $\cos(6\pi/7)$.

5.2.2 Equação com forma particular

Como é sabido, não temos fórmulas para calcular raízes de equações algébricas com grau maior ou igual a cinco. Ora, nem por isso deixamos de abordar tais equações, pois podem aparecer em um particular problema. Para tais equações existem os métodos numéricos, que fogem do escopo desse trabalho. Para particulares classes de equações podemos resolvê-las analiticamente. Já havíamos mencionado uma delas, aquela em que temos a forma fatorada, conforme Eq.(5.2). Aqui, apresentamos mais uma delas que, independentemente do grau é possível obtermos as raízes.

Seja $x \in \mathbb{N}$. Consideremos a equação algébrica $(x + p)^n = q$ com $p, q \in \mathbb{C}$ e n a ordem da equação. Dizemos que x é raiz dessa equação se $x + p$ é raiz de ordem n de q, conforme Capítulo 4. Logo, podemos escrever a solução na forma

$$x + p = \sqrt[n]{q} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = -p + \sqrt[n]{q}$$

A partir da expressão para as raízes enésimas de um número complexo, Eq.(4.6), obtemos

$$x = -p + \sqrt[n]{r} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

com $k = 0, 1, \ldots, (n - 1)$.

EXEMPLO 5.11. EQUAÇÃO ALGÉBRICA DE GRAU TRÊS

Sejam $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ com $a_0 \neq 0$, os coeficientes da equação algébrica de terceiro grau $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$. Essa equação, sem perda de generalidade, pode ser escrita como $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$, sendo esses coeficientes tais que $A = a_1/a_0$, $B = a_2/a_0$ e $C = a_3/a_0$.

Vamos, a partir de agora, conduzir essa equação de modo que seja solúvel por radicais. Para tal, começamos por eliminar o coeficiente de grau dois, a partir de uma transformação do tipo $x = t + \alpha$ onde α deve ser determinado impondo que o coeficiente de grau dois seja zero, obtendo uma equação na incógnita t que, também, sem perda de generalidade, pode ser chamada de x.

Vamos manter a variável t para a equação a ser obtida. Substituindo $x = t + \alpha$ na equação algébrica de grau três cujo coeficiente do maior grau é um obtemos

$$(t+\alpha)^3 + A(t+\alpha)^2 + B(t+\alpha) + C = 0$$

que, após um rearranjo, pode ser escrita na forma

$$t^3 + (3\alpha + A)t^2 + (3\alpha^2 + 2A\alpha + B)t + (\alpha^3 + A\alpha^2 + B\alpha + C) = 0.$$

Com a imposição de ser zero o coeficiente de grau dois implica $3\alpha + A = 0$ de onde $\alpha = -A/3$ que substituído na equação precedente fornece

$$t^3 + \left(B - \frac{A^2}{3}\right)t + \left(\frac{2A^3}{27} - \frac{AB}{3} + C\right) = 0.$$

Introduzindo os parâmetros $p = B - \dfrac{A^2}{3}$ e $q = \dfrac{2A^3}{27} - \dfrac{AB}{3} + C$, obtemos

$$t^3 + pt + q = 0$$

cuja forma é a mesma da maioria das equações já discutidas e resolvidas.

Mais uma substituição, agora de modo a conduzir a equação na incógnita t em uma outra equação na incógnita u, tal que $t = u + \beta$ com $\beta = -p/3u$. Substituindo t dessa forma na precedente temos

$$\left(u - \frac{p}{3u}\right)^3 + p\left(u - \frac{p}{3u}\right) + q = 0,$$

que, após simplificação, é conduzida à forma

$$u^6 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Essa equação algébrica com a substituição $u^3 = v$ é levada a uma equação do segundo grau com soluções dadas por

$$v = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Cabe uma observação, pois para cada valor de v temos três valor para u de onde segue que temos seis soluções para uma equação algébrica de grau três. Ora, o cuidado que se deve ter é que se u^3 é raiz da equação de sexto grau, também o é $-p/3u$. Em resumo, os valores que são raízes cúbicas de

$$-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

têm os correspondentes que são as raízes cúbicas de

$$-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

e vice-versa, isto é, se tomássemos o sinal negativo na primeira deveríamos tomar o respectivo sinal positivo na segunda. É importante notar que para obter a solução da equação algébrica de partida, na incógnita x, devemos proceder com os passos inversos, isto é, após resolver a equação na variável u e a correspondente em β, a fim de não considerar duplicidade de raízes, devemos voltar com a adição do termo que permitiu a redução da equação na incógnita x em t.

Enfim, por curiosidade, concluímos com a famosa fórmula de Cardano

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Devemos ter em mente que, apesar de existir uma fórmula para obter as raízes cúbicas de um número, essa fórmula não é prática. Procedimento análogo, nos conduz à expressão para as raízes de uma equação de quarto grau. Essas expressões valem pelo caráter histórico, pois foram apresentadas há quase quinhentos anos.

5.3 Exercícios

1. Determine os coeficientes da equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$, cujas raízes são $2+i$ e $2-i$.

2. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Considere o polinômio $p(x) = ax^2 + bx + c$. Determine o grau do polinômio $p(x+h) - p(x)$ onde h é uma constante.

3. Sabendo que o polinômio $p(x) = 2x^4 + 3x^3 - mx - n - 3$ divide $x+1$ e $x-3$, calcule $m+n$.

4. (Escola Naval/1951) No trinômio $(m-1)x^2 - (p+5)x - t$, o parâmetro m é o menor dos numeradores das frações parciais em que se decompõe $(7x+13)/(x^2+2x-3)$ e p é o resto da divisão de $x^2 - x - 3$ por $x+2$. Determinados m e p, calcular os valores de t que verificam sempre: $(m-1)x^2 - (p+5)x - t > 0$.

5. Sabendo que $p(x) = 2x^3 - x^2 - 8x + 4$ divide $x+a$ e $bx-1$, determine a e b e escreva $p(x)$ na forma fatorada.

6. Determine os coeficientes m, n a fim de que o polinômio $x^4 - 5x^2 + mx + 4$ seja divisível por $x^2 - x + n$.

7. (EPUSP/62) Determinar os números a, b e o maior inteiro m de tal modo que o polinômio $x^5 - ax^4 + bx^3 - bx^2 + 2x - 1$ seja divisível por $(x-1)^m$.

8. (Olimpíada Colombiana/2009) O produto de cinco inteiros consecutivos é divisível por 13 e por 31. Se esse produto é o menor que cumpre essa propriedade, determine o menor deles.

9. (Olimpíada Colombiana/2009) Calcule a soma de todas as soluções positivas da equação $(x^2 - x)^2 = 18(x^2 - x) - 72$.

10. Sendo a, b, c as raízes da equação $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$. Calcule a soma dos: a) inversos das raízes e b) quadrados das raízes.

11. Considere $x = \sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}}$. a) Mostre que x é solução de uma equação algébrica de grau três; b) Resolva essa equação e c) Mostre que x é natural.

12. Sabendo que $1+i$ é raiz da equação $x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 6x + 2 = 0$, determine as outras três raízes.

13. Mostre que a soma das raízes da equação $x^4 - 2x^3 - 17x^2 + 18x + 32 = 0$ é igual a uma das raízes.

14. Determine as raízes do polinômio: $\mathsf{p}(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 4$.

15. Considere os polinômios

$$\mathsf{A}(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 4 \quad \text{e} \quad \mathsf{B}(x) = x^2 - x + 4$$

a) Mostre que $\mathsf{A}(x)$ só tem uma raiz real enquanto $\mathsf{B}(x)$ não tem nenhuma raiz real. b) Efetue a divisão de $\mathsf{A}(x)$ por $\mathsf{B}(x)$.

16. Obtenha as raízes de $x^3 + 9x - 26 = 0$.

17. Resolva a dequação $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0$ sabendo que uma das raízes é igual a diferença das outras duas.

18. (ENE/1947) Dada a equação $x^3 + 6x^2 + (m + 12)x + (2m + 40) = 0$ transformá-la em outra desprovida do termo de segundo grau e determinar em seguida o valor de m para que o dobro de uma das raízes da equação transformada seja a média geométrica das outras duas.

19. (ENE/1961) Dê a soma dos produtos distintos das raízes, tomadas três a três da equação $6x^5 - 8x^4 - 3x^3 - x^2 + 5x - 1 = 0$.

20. (ITA/1950) Resolva a equação $(x-1)x^2 = x(x+1) - 2x$.

21. Determine a soma e o produto das raízes da equação $x^5 + x^3 - 2x + 12 = 0$.

22. Mostre que $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4$.

23. Determine a soma das raízes da equação $x^5 + x^3 + x + 1 = 0$.

24. Determine o produto das raízes da equação $x^6 - x^4 - x^2 + 3 = 0$.

25. Resolva a equação $x^3 - 3x + 2 = 0$.

26. Determine o resto da divisão de $x^{2018} - 1$ por $x + 1$.

27. Qual é o resto da divisão de $x^3 - 2x + 4$ por $(x-1)^2$?

28. Obtenha, se existir, $k > 0$ de modo que $x^4 + kx^3 + kx^2 - 3$ seja divisível por $x - 1$.

29. Sabe-se que $x = 1$ é raiz das equações

$$x^4 + ax^3 + a^2x + x - 2 = 0 \qquad \text{e} \qquad bx^4 + x^3 + x^2 + b^2x - 2 = 0,$$

com $a, b \in \mathbb{R}$. Mostre que $a = b$ ou $a + b = -1$.

30. (FGV/95-Adaptado) Mostre que as raízes da equação $2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ pertencem ao intervalo fechado $[-1, 1]$.

31. FGV/95-Adaptado) Sabe-se que o polinômio $f = x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2$ é divisível por $(x^2 - 1)$. Determine um outro divisor de f.

32. (ITA/94-Adaptado) Seja $P(x)$ um polinômio de grau 5, com coeficientes rais, admitindo 2 e i como raízes. Sendo $P(1)P(-1) < 0$, determine o número de raízes reais de $P(x)$ pertencentes ao intervalo aberto $]-1,1[$.

33. (ITA/94-Adaptado.) Sejam $a,b,c \in \mathbb{R}$. As raízes da equação $x^3+ax^2+bx+c=0$ são inteiros positivos consecutivos. A soma dos quadrados dessas raízes é 14. Determine $a^2+b^2+c^2$.

34. (ITA/94-Adaptado) A identidade

$$\frac{x^3+4}{x^3+1} = 1 + \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$$

é válida para todo número real $x \neq -1$. Calcule $a+b+c$.

35. (ITA/95-Adaptado) A divisão de um polinômio $P(x)$ por x^2-x resulta em $6x^2+5x+3$ e resto $-7x$. Determine o resto da divisão de $P(x)$ por $2x+1$.

36. (ITA/96-Adaptado) Considere o polinômio: $p(z) = z^6+2z^5+6z^4+12z^3+8z^2+16z$. Mostre que $p(z)=0$ tem apenas duas raízes reais e distintas.

37. (Vunesp/95.) Se m é raiz do polinômio $p(x) = x^6-(m+1)x^5+32$, determine o resto da divisão de $p(x)$ por $x-1$.

38. (Unicamp/94) Determine o quociente e o resto da divisão de $x^{100}+x+1$ por x^2-1.

39. (Unicamp/95) Ache todas as raízes (reais e complexas) da equação $x^6-7x^3-8=0$.

40. (Unicamp/96) Encontre os valores de m para os quais a equação $x^3-mx^2+mx-m^2=1$ tem pelo menos uma raiz inteira. Para cada um desses valores de m, ache as três raízes da equação (do terceiro grau) correspondentes.

41. (Fuvest/94-Adaptado) As três raízes de $9x^3-31x-10=0$ são p, q e 2. Calcule o valor de p^2+q^2.

42. (Fuvest/95) a) Quais são as raízes inteiras do polinômio $p(x) = x^3-x^2-4$? b) Decomponha o polinômio $p(x)$ em um produto de dois polinômios, um de grau 1 e outro de grau 2. c) Resolva a inequação $p(x) < 4(x-2)$.

43. (Fuvest/95-Adaptado) O produto de duas raízes da equação $2x^3 = x^2+kx-4$ é igual a 1. Determinar k.

44. (Fuvest/96-Adaptado) Obter o número de raízes complexas, que não são reais, do polinômio $p(x) = x+x^3+x^5+\cdots+x^{2n+1}$, sendo $n>1$.

45. (Fuvest/96-Adaptado) Seja $p(x) = x^4+bx^3+cx^2+dx+e$ um polinômio com coeficientes inteiros. Sabe-se que as quatro raízes de $p(x)$ são inteiras e que três delas são pares e uma é ímpar. Quantos coeficientes pares tem o polinômio $p(x)$?

46. (Fuvest/96-Adaptado) Seja $p(x)$ um polinômio divisível por $x-3$. Dividindo $p(x)$ por $x-1$ obtemos quociente $q(x)$ e o resto $r=10$. Determine o resto da divisão de $q(x)$ por $x-3$.

47. (Olimpíadas. Bélgica/1978) Determine um polinômio com coeficientes inteiros de modo que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ seja raiz.

48. Prove que $\operatorname{sen} 20° \cdot \operatorname{sen} 40° \cdot \operatorname{sen} 80° = \sqrt{3}/8$.

49. (Olimpíadas. Vietnã/1982) Determine a, b e c números inteiros tais que as raízes da equação $ax^2+bx+c=0$ sejam $\cos 72°$ e $\cos 144°$.

50. Prove que $\cot^2(\pi/7)+\cot^2(2\pi/7)+\cot^2(3\pi/7)=5$.

51. (Unicamp/2015-Adaptado) Sejam $a, x \in \mathbb{R}$. Considere o polinômio $p(x)=x^3-x^2+ax-a$. Se $x=1$ é a única raiz real de $p(x)$, o que podemos afirmar sobre a?

52. (ITA/2015-Adaptado) Considere o polinômio p dado por $p(x)=2x^3+ax^2+bx-16$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Sabendo-se que $p(x)$ admite raiz dupla e que 2 é uma raiz de $p(x)$, determine $b-a$.

53. (ITA/2015) Seja p o polinômio dado por

$$p(x)=\sum_{j=0}^{15} a_j x^j$$

com $a_j \in \mathbb{R}$, $j=0,1,2,\ldots,15$, e $a_{15} \neq 0$. Sabendo-se que i é uma raiz de p e que $p(2)=1$, determine o resto da divisão de p pelo polinômio q, dado por $q(x)=x^3-2x^2+x-2$.

54. (Unicamp/2017-Adaptado) Considere o polinômio $p(x)=x^n+x^m+1$, em que $n>m\geq 1$. O que podemos afirmar em relação à paridade de n e m, sabendo que o resto da divisão de $p(x)$ por $x+1$ é igual a 3.

55. (Fuvest/2017-Adaptado) O polinômio $P(x)=x^3-3x^2+7x-5$ possui uma raiz complexa ξ cuja parte imaginária é positiva. Determine a parte real de ξ^3.

56. (Fuvest/2018-Adaptado) Considere o polinômio

$$P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

em que $a_0,\ldots,a_{n-1}\in\mathbb{R}$. Sabe-se que as suas n raízes estão sobre a circunferência unitária e que $a_0<0$. Determine, para $n\geq 1$, o produto das n raízes de $P(x)$.

57. (Unicamp/2018-Adaptado) Sejam $p(x)$ e $q(x)$ polinômios com coeficientes reais. Dividindo-se $p(x)$ por $q(x)$ obtêm-se quociente e resto iguais a x^2+1. O que podemos afirmar em relação às raízes de $p(x)$?

58. (ITA/2018) As raízes do polinômio $1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6+z^7$, quando representadas no plano complexo, formam os vértices de um polígono convexo. Determine a área desse polígono.

5.3.1 Respostas e/ou sugestões

1. $a=m$, $b=-4m$ e $c=5m$ com $m\in\mathbb{R}^*$.

2. Primeiro grau.

3. Calcule o valor numérico de $p(x)$ para $x=-1$ e $x=3$ de modo a mostrar que a soma é 118.

4. Imponha que o discriminante é negativo e obtenha $\{t \in \mathbb{R} : t < -16\}$.

5. $a = 2$ e $b = 2$. Forma fatorada $p(x) = (x-2)(x+2)(2x-1)$.

6. $m = 0$ e $n = -2$.

7. Efetue a divisão por $x - 1$ e determine a; novamente e determine b e divida por $(x-1)^2$ para obter m, logo $a = 2$, $b = 1$ e $m = 3$.

8. Escreva os múltiplos de 13 e 31 para obter 61.

9. Introduza $x^2 - x = t$ e resolva duas equações de segundo grau para obter 7.

10. Utilize as relações de Girard e use a identidade $(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$ para obter a) 11/6 e b) 14.

11. a) Utilize a expressão para o cubo da soma; b) Determine uma das raízes por inspeção e c) Conclua do item b.

12. $x_1 = 1 - i$, $x_2 = -2 + \sqrt{3}$ e $x_3 = -2 - \sqrt{3}$.

13. Utilize as relações de Girard para obter a soma S e mostre que $p(S) = 0$.

14. Determine uma raiz por inspeção. Obtenha $x = 1$ e $x = (1 \pm \sqrt{15}i)/2$.

15. a) Segue do anterior e b) $x - 1$.

16. Determine uma raiz por inspeção e obtenha 2 e $-1 \pm 2\sqrt{3}i$.

17. Utilize as relações de Girard para obter 2, 3 e 5.

18. Introduza a mudança $x \to x + \alpha$ e determine α para obter a equação $x^3 + mx + 32 = 0$ e utilize as relações de Girard para obter $m = 12$.

19. Utilize as relações de Girard para obter $1/6$.

20. $0, 1, 1$.

21. A partir das relações de Girard, mostre que Soma $= 0$ e Produto $= 12$.

22. Utilize $(A+B)^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A+B)$ para obter uma equação cúbica com uma só raiz real. Obtenha a raiz por inspeção.

23. Zero.

24. Utilize as relações de Girard para mostrar que a soma das raízes é 3.

25. Direto, por inspeção, $x = 1$ (dupla) e $x = -2$.

26. Zero.

27. Efetue a divisão para obter o resto $x + 2$.

28. Utilize o teorema do resto para mostrar que $k = 1$.

29. Use o teorema do resto e fatoração.

30. Utilize fatoração.

31. Efetue a divisão e obtenha $q(x) = x^2 - x - 2$.

32. Escreva o polinômio na forma $p(x) = (x-2)(x+i)(x-i)(x^2+Ax+B)$ e conclua que só temos uma raiz real.

33. Escreva as raízes na forma $\alpha - 1$, α e $\alpha + 1$ e mostre que $a^2 + b^2 + c^2 = 193$.

34. Reduza ao mesmo denominador e use identidade de polinômios para obter 2.

35. Obtenha $P(x)$ e calcule $P(1/2)$ para obter 5.

36. Utilize fatoração para escrever $p(z) = z(z+2)(z^2+2)(z^2+4)$.

37. Utilize o teorema do resto e determine m. Calcule $p(1)$ e obtenha 30.

38. Efetue a divisão para obter $q(x) = x^{98} + x^{96} + x^{94} + \cdots + x^2 + 1$ e $r(x) = x + 2$.

39. Chame $x^3 = t$ e resolva duas equações cúbicas para obter $\{-1, (1 \pm i\sqrt{3})/2, 2, -1 \pm i\sqrt{3}\}$.

40. Pelo menos uma, $m = 0$, logo $x^3 = 1$ de onde, usando a fórmula de de Moivre, segue para as raízes $\{1, (-1 \pm i\sqrt{3})/2\}$ e, para três raízes, tome $x \to x + \alpha$ de modo a eliminar o termo em x^2 para obter $m = -3$, $\{-2, (-1 \pm \sqrt{21})/2\}$.

41. Utilize as relações de Girard para obter $26/9$.

42. a) Por inspeção $x = 2$ é raiz, b) $p(x) = (x-2)(x^2+x+2)$, c) $\{x \in \mathbb{R} : x < -2 \text{ ou } 1 < x < 2\}$.

43. Utilize as relações de Girard e fatoração para obter $k = 8$.

44. Utilize fatoração e o teorema fundamental para obter $2n$.

45. Utilize as relações de Girard e mostre que o termo independente é ímpar e conclua que são três os coeficientes pares.

46. Utilize o teorema do resto para obter -5.

47. Eleve $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ ao quadrado e depois ao quadrado novamente. Expresse a $\sqrt{6}$ de dois modos distintos a fim de obter $P(x) = x^4 - 10x^2 + 1$, que é o polinômio desejado.

48. Utilize as igualdades $\operatorname{sen} 60° = \operatorname{sen} 120° = \sqrt{3}/2$ de modo a mostrar que $\operatorname{sen} 20°$ e $\operatorname{sen} 40°$ satisfazem a mesma equação cúbica. Denotando por Ω a terceira raiz, mostre que essa raiz é dada por $\Omega = -\operatorname{sen} 80°$. Para tal, utilizando as relações de Girard, expresse a soma de dois senos como um produto, bem como a relação $\cos 10° = \operatorname{sen} 80°$.

49. Utilize a expressão para o arco dobro, relativamente ao cosseno, pois $72 = 2 \cdot 36 = 2 \cdot 2 \cdot 18$ e o fato que $\cos 72° = \operatorname{sen} 18°$. Obtenha uma equação de quarto grau com raízes 1 e $-1/2$, que não servem, e mostre que uma das raízes da equação $4x^2 + 2x - 1 = 0$ é $\cos 72°$ e a outra é $\cos 144°$. A propósito, os coeficientes procurados são, respectivamente, 4, 2 e -1.

50. Utilize $\cot^2\theta + 1 = 1/\operatorname{sen}^2\theta$ e obtenha $\operatorname{sen}^{-2}(\pi/7) + \operatorname{sen}^{-2}(2\pi/7) + \operatorname{sen}^{-2}(3\pi/7) = 8$. Introduza as mudanças $\operatorname{sen}^2(\pi/7) = x$ e $4x = y$, e as expressões para os arcos duplo e triplo a fim de obter a seguinte equação algébrica $2y^4 - 21y^3 + 77y^2 - 112y + 49 = 0$. Mostre que $y = 7/2$ é raiz dessa equação de grau quatro e obtenha uma outra equação algébrica de grau três $y^3 - 7y^2 + 14y - 4 = 0$. Utilize as relações de Girard para verificar que $4\operatorname{sen}^2(\pi/7)$, $4\operatorname{sen}^2(2\pi/7)$ e $4\operatorname{sen}^2(3\pi/7)$ são as raízes dessa equação cuja soma é igual a 7.

51. Utilize fatoração para concluir que $a > 0$.

52. A partir do teorema do resto, imponha que o quociente da divisão de $p(x)$ por $x - 2$ é um quadrado perfeito e mostre que $b - a = -12$.

53. Use o teorema do resto e a definição de divisão para obter $(x^2 + 1)/5$.

54. Utilize o teorema do resto e mostre que m e n são pares.

55. Mostre que $x = 1$ é raiz. Sendo $\xi = x + iy$ com $x, y \in \mathbb{R}$, mostre que a parte real de ξ^3 é -11.

56. Utilize as relações de Girard para mostrar que o produto $P = (-1)^n a_0$ e discuta a paridade de n para concluir que $P = (-1)^{n+1}$.

57. As raízes de $p(x)$ são $x = \pm i$, logo $p(x)$ tem raízes complexas.

58. Mostre que as raízes são tais que $z = -1$, $z = \pm i$, $z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ e $z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 \mp i)$ e mostre que a área é $A = (3\sqrt{2} + 1)/2$, unidades de área.

Capítulo 6

Funções

Seja $x \in \mathbb{R}$. Determine a equação da chamada curva de Agnesi, uma função $y = f(x)$, também conhecida pelo nome de bruxa de Agnesi.

Neste capítulo vamos introduzir o conceito de função tendo em mente que, vamos voltar aos capítulos anteriores, esboçando alguns gráficos e, ainda mais importante, será pré-requisito para os próximos três capítulos. Começamos com os conceitos gerais para, depois, estudar casos particulares, dentre eles, as funções afins, as quadráticas, as logarítmicas, as exponenciais, as racionais e as trigonométricas. Outras funções serão estudadas após o conceito de derivada, pois o tratamento com funções diferentes das mencionadas, requer conceitos que extrapolam o conteúdo até então apresentado.

6.1 Relações e funções

Vamos tratar o caso geral e as propriedades, também gerais, de modo a obter as demais como casos particulares, bem como recuperar aquelas relativas ao discutido nos capítulos anteriores.

DEFINIÇÃO 6.1.1. *Função.*

Sejam os conjuntos $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$. Definimos uma função $\mathsf{f} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ (dizemos, uma função de $\mathcal{X}$ em $\mathcal{Y}$) como uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in \mathcal{X}$ um elemento $y = \mathsf{f}(x) \in \mathcal{Y}$.

O conjunto $\mathcal{X}$ é chamado domínio enquanto $\mathcal{Y}$ é o contradomínio da função f. Para cada $x \in \mathcal{X}$, o elemento $\mathsf{f}(x) \in \mathcal{Y}$ chama-se a imagem de x pela função f, ou o valor exibido pela função f no ponto $x \in \mathcal{X}$. Escreve-se $x \mapsto \mathsf{f}(x)$ para indicar que f transforma (ou leva) x em $\mathsf{f}(x)$.

EXEMPLO 6.1. CORRESPONDÊNCIA $\mathbb{N}$ EM $\mathbb{N}$

A correspondência que associa a cada número natural n seu sucessor $n+1$ define a função s

$$\mathsf{s} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad \text{com} \qquad \mathsf{s}(n) = n+1$$

Os três ingredientes que caracterizam uma função (sem um deles não podemos falar em função) são, neste caso:

$$\begin{array}{rl} \text{Domínio} & \mathbb{N} \\ \text{Contradomínio} & \mathbb{N} \\ \text{Lei de correspondência} & \mathsf{s}(n) = n+1 \end{array}$$

EXEMPLO 6.2. EXEMPLOS DO DIA-A-DIA

Apresentamos alguns exemplos corriqueiros que podem ser associados a um tipo de relação (função) quando devidamente explicitados os conjuntos domínio e contradomínio. Levamos em conta apenas a lei de correspondência.

1. Qual é a área de uma sala retangular cuja largura é 5 unidades de comprimento? Observe que, neste caso e nos três a seguir, as grandezas devem ser estritamente positivas.

2. Qual é a área da superfície de uma mesa redonda de raio r?

3. Qual é o volume de um rolo cilíndrico de papel cujo raio da base é 6 unidades de comprimento?

4. Considere um gás ideal para o qual vale a equação de estado: $PV = nRT$ onde P é a pressão; V é o volume; n é o número de moles; R uma constante positiva e T a temperatura em Kelvin. a) Como varia a pressão em função da temperatura? e b) Como varia a pressão em função do volume?

A discussão se resume em discernir sobre a lei de correspondência, tendo em mente que o domínio e o contra-domínio devem estar definidos.

1. A área de um retângulo é base $\times$ (altura) largura e, como a largura é dada, obtemos a lei como $\mathsf{A}(x) = 5x$ sendo x o comprimento da base.

2. Em analogia ao anterior e como a área de um círculo, a menos de um fator constante, só depende do raio, temos $\mathsf{A}(r) = \pi r^2$.

3. O volume de um cilindro é dado por área da base $\times$ altura e, como o raio da base é conhecido, só depende da altura, isto é, $\mathsf{V}(h) = 36\pi h$.

a) Admitamos o volume constante. A pressão varia diretamente proporcional à temperatura, isto é, o aumento da temperatura acarreta o aumento da pressão e vice-versa.

b) Seja a temperatura constante. A pressão varia inversamente proporcional ao volume, ou seja, o aumento da pressão acarreta a diminuição do volume e vice-versa.

6.1.1 Funções injetiva e sobrejetiva

Nessa seção introduzimos o conceito de função injetiva (injetora), sobrejetiva (sobrejetora) e bijetiva (bijetora). Através de um exemplo usando diagrama de flechas (Euler-Venn) discutimos esses conceitos.

DEFINIÇÃO 6.1.2. FUNÇÃO INJETIVA

Uma função $\mathsf{f} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ chama-se injetiva quando elementos diferentes em $\mathcal{X}$ são levados, por f, em elementos diferentes, em $\mathcal{Y}$. f é injetiva quando

$$x \neq x' \quad \text{em} \quad \mathcal{X} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathsf{f}(x) \neq \mathsf{f}(x') \quad \text{em} \quad \mathcal{Y}$$

condição essa que pode ser escrita em sua forma contrapositiva como

$$\mathsf{f}(x) = \mathsf{f}(x') \qquad \Longrightarrow \qquad x = x'$$

O EXEMPLO 6.1. se constitui num exemplo de função injetiva.

DEFINIÇÃO 6.1.3. FUNÇÃO SOBREJETIVA

Diz-se que uma função $\mathsf{f} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ é sobrejetiva [ou sobre $\mathcal{Y}$] quando para qualquer elemento $y \in \mathcal{Y}$, pode-se encontrar (pelo menos) um elemento $x \in \mathcal{X}$ tal que $\mathsf{f}(x) = y$. [Contradomínio $\to$ imagem].

Em geral, chama-se imagem do subconjunto $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ pela função $\mathsf{f} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ ao subconjunto $\mathsf{f}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{Y}$ formado pelos elementos $\mathsf{f}(x)$, com $x \in \mathcal{A}$. A função $\mathsf{f} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ é sobrejetiva quando $\mathsf{f}(\mathcal{X}) = \mathcal{Y}$. O conjunto $\mathsf{f}(\mathcal{X})$, imagem do domínio $\mathcal{X}$ pela função f, chama-se também a imagem da função f.

Como já mencionamos, a regra que ensina como obter $\mathsf{f}(x)$ quando é dado x é inteiramente arbitrária, estando sujeita apenas às duas condições a seguir:
a) Não deve haver exceções. A fim de que a função f tenha o conjunto $\mathcal{X}$ como domínio, a regra deve fornecer $\mathsf{f}(x)$, seja qual for $x \in \mathcal{X}$ dado. (*Não sobram elementos no conjunto de partida.*)
b) Não pode haver ambiguidades. A cada $x \in \mathcal{X}$, a regra deve fazer corresponder um único $\mathsf{f}(x)$ em $\mathcal{Y}$. (*Não partem dois do mesmo elemento.*)

DEFINIÇÃO 6.1.4. FUNÇÃO BIJETIVA

Uma função $\mathsf{f} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ chama-se uma bijeção ou uma correspondência biunívoca entre $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ quando é ao mesmo tempo injetiva e sobrejetiva.

EXEMPLO 6.3. NÚMEROS NATURAIS PARES

Seja $\mathcal{P}$ o conjunto dos números naturais pares:

$$\mathcal{P} = \{2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\}$$

Obtém-se uma correspondência biunívoca $\mathsf{f} : \mathbb{N} \to \mathcal{P}$ pondo-se $\mathsf{f}(n) = 2n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, a função é injetiva pois para $x \neq x' \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{f}(x) \neq \mathsf{f}(x')$ bem como é sobrejetiva uma vez que para cada elemento de $\mathbb{N}$ temos um único elemento de $\mathcal{P}$.

Este exemplo, creditado a Galileu, tem o conjunto $\mathcal{P}$ um conjunto próprio de $\mathbb{N}$. E, visto que, a correspondência biunívoca está definida, dizemos que os dois conjuntos $\mathcal{P}$ e $\mathbb{N}$ têm o mesmo número cardinal.

EXEMPLO 6.4. DIAGRAMA DE FLECHAS

Consideremos dois conjuntos: um conjunto $\mathcal{A}$ formado por três pessoas

$$\mathcal{A}=\{ \text{ Débora, Carolina, Fabiano } \}$$

e um conjunto $\mathcal{B}$ formado por três times de futebol

$$\mathcal{B}=\{ \text{ Santos, Guarani, Atlético } \}$$

Existem várias relações as quais podemos associar elementos do conjunto $\mathcal{A}$ com elementos do conjunto $\mathcal{B}$. Vamos discutir algumas através do chamado diagrama de flechas. Ver Figura 6.1.

i) Uma primeira maneira de associarmos os conjuntos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ é fornecer a regra: Elementos de $\mathcal{A}$ se associam com elementos de $\mathcal{B}$ que têm o mesmo número de letras no nome e no time de futebol. Usando a notação de par ordenado

$$\mathsf{Q}=\{ \text{ (Débora,Santos), (Fabiano,Guarani), (Carolina,Atlético) } \}$$

ii) As pessoas do sexo feminino associamos com o Santos e do sexo masculino associamos com o Guarani

$$\mathsf{R}=\{ \text{ (Débora,Santos), (Carolina,Santos), (Fabiano,Guarani) } \}$$

iii) Número de letras no nome ímpar associamos com o Santos e número par com Atlético

$$\mathsf{S}=\{ \text{ (Fabiano,Santos), (Débora,Atlético), (Carolina,Atlético) } \}$$

iv) O nome com o maior número de letras associado com o Santos

$$\mathsf{T}=\{ \text{ (Carolina,Santos) } \}$$

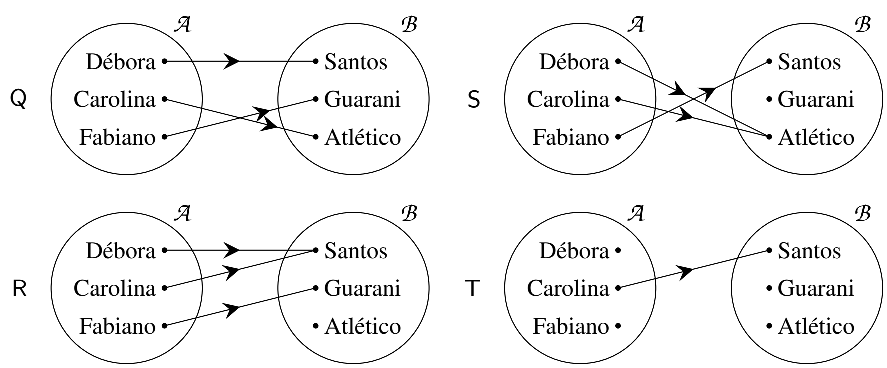


Figura 6.1: Diagrama de flechas.

Note que todos os conjuntos $\mathsf{Q}, \mathsf{R}, \mathsf{S}, \mathsf{T}$ são formados por pares ordenados cujos primeiros elementos pertencem ao conjunto $\mathcal{A}$ enquanto os segundos elementos pertencem ao conjunto $\mathcal{B}$, isto é, são todos subconjuntos do produto cartesiano $\mathcal{A}$ por $\mathcal{B}$

$$\mathsf{Q} \subset \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \qquad \mathsf{R} \subset \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \qquad \mathsf{S} \subset \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \qquad \mathsf{T} \subset \mathcal{A} \times \mathcal{B}$$

É possível determinar outras relações de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$, porém todas serão subconjuntos de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Neste particular caso, como $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ tem 9 elementos, e o número de subconjuntos de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ é $2^9 = 512$, podemos estabelecer ao todo 512 relações de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$. Sendo $\mathsf{W} = \mathsf{Q}, \mathsf{R}, \mathsf{S}, \mathsf{T}$ temos, formalmente,

$$\boxed{\mathsf{W} \text{ é uma relação de } \mathcal{A} \text{ em } \mathcal{B} \text{ se } \mathsf{W} \text{ for um subconjunto de } \mathcal{A} \times \mathcal{B}}$$

Concluindo, a relação Q é uma bijeção (correspondência biunívoca) logo pode representar uma função. As relações R e S não são nem injetivas nem sobrejetivas, porém podem representar funções, enquanto a relação $\mathcal{T}$ não representa uma função [*restam elementos no conjunto de partida*]. Ainda mais, o domínio de W, denotado por $\mathcal{D}(\mathsf{W})$ é um subconjunto de $\mathcal{A}$ enquanto, a imagem, $I(\mathsf{W})$, é um subconjunto de $\mathcal{B}$.

DEFINIÇÃO 6.1.5. CONJUNTOS NUMÉRICOS

Quando os conjuntos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são conjuntos numéricos, as relações são formadas por pares ordenados de números. Um par ordenado de números reais pode ser representado geometricamente por meio de dois eixos perpendiculares, o horizontal chamado eixo das abscissas, relacionado com o primeiro elemento do par ordenado, e o vertical, chamado eixo das ordenadas, associado com o segundo elemento do par ordenado.

DEFINIÇÃO 6.1.6. GRÁFICO DE UMA RELAÇÃO

Se a relação é uma relação funcional ela é chamada de função, $\mathsf{f} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. O elemento $x \in \mathcal{X}$ está relacionado com o elemento $y \in \mathcal{Y}$ quando $\mathsf{f}(x) = y$.

O gráfico de uma relação $\mathcal{W}$ entre os conjuntos $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ é o subconjunto $\mathsf{G}(\mathcal{W})$ do produto cartesiano $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ formado pelos pares ordenados (x,y) denotado por $x\mathcal{W}y$. Assim, podemos escrever

$$\mathsf{G}(\mathcal{W}) = \{(x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y};\ x\mathcal{W}y\}.$$

O gráfico de uma função está incluído na definição de gráfico de uma relação.

Note que, a definição de função carrega consigo os termos correspondência, transformação, dependência (uma grandeza como função de outra, como vimos anteriormente) ou resultado de um movimento (rotação, por exemplo).

Em resumo, um subconjunto qualquer de $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ é o gráfico de uma relação de $\mathcal{X}$ para $\mathcal{Y}$. Se esse conjunto cumpre a condição: para cada $x \in \mathcal{X}$ existe um, e somente um, $y \in \mathcal{Y}$ tal que $(x,y) \in \mathsf{G}$, ele é o gráfico de uma função.

EXEMPLO 6.5. PRODUTO CARTESIANO

Sejam os conjuntos numéricos $\mathcal{A} = \{0,1,2,3\}$ e $\mathcal{B} = \{1,3,5,7\}$. Pede-se:
i) Explicitar o conjunto $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ e esboçar um gráfico.
ii) Sejam $\mathsf{f} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e a relação $y = 2x+1$. É f injetiva? É f sobrejetiva?
iii) Mostre que $y = 2x+3$ é uma relação possível mas não pode representar uma função. Justifique.

i) Começamos por explicitar o conjunto de tal modo que os pares ordenados têm, primeiro, elementos de $\mathcal{A}$ e depois elementos de $\mathcal{B}$. Então

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \times \mathcal{B} \ = \ & \{(0,1),(0,3)(0,5),(0,7),(1,1),(1,3),(1,5),(1,7), \\ & (2,1),(2,3),(2,5),(2,7),(3,1),(3,3),(3,5),(3,7)\}. \end{aligned}$$

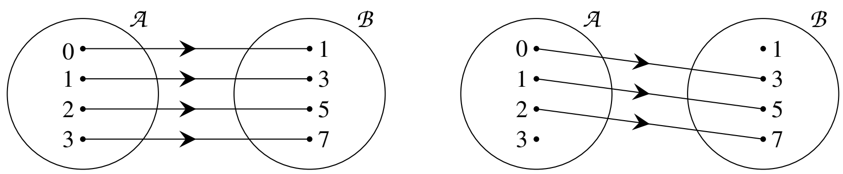


Figura 6.2: Conjuntos numéricos. Apenas à esquerda, representa uma função.

Esboço do diagrama de flechas, conforme Figura 6.2.

ii) Sim, é injetiva, bem como sobrejetiva. Visto que é injetiva e sobrejetiva, ela é também uma função bijetiva.

iii) Conforme Figura 6.2, à direita, não pode representar uma função, pois sobram elementos no conjunto de partida, isto é, no domínio.

6.1.2 Estudo de uma função. Gráfico.

Antes de particularizarmos este estudo sobre funções para uma específica função, nesta seção, apresentamos conceitos necessários para esboçarmos o gráfico de uma função. Ressaltamos que tal estudo será discutido, de forma geral, após a introdução dos conceitos de limites e derivadas. Ainda mais, vamos, sem fazer menção explícita, admitir que os conjuntos associados, tanto ao domínio quanto ao contradomínio, são subconjuntos dos reais.

DEFINIÇÃO 6.1.7. DOMÍNIO E IMAGEM

O domínio de uma função é constituído por todos os elementos de $\mathcal{A}$, conjunto de partida. Quando não especificamos, admitimos que seja formado por todos os valores reais de x, para os quais exista a imagem. Ainda mais, nos casos em que trabalhamos com situações concretas (prática), o domínio será constituído de todos os valores reais de x para os quais tenha significado o cálculo da imagem.

EXEMPLO 6.6. DOMÍNIO

Antes de mais nada, convém que fique claro que a notação de função carrega consigo toda a nomenclatura da definição de função, isto é, $\mathsf{f} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ com $x \in \mathcal{A}$ e $\mathsf{f}(x) \in \mathcal{B}$. Este linguajar corriqueiro é utilizado por simplicidade de modo que não nos tornemos maçantes. Discuta o domínio das funções a seguir:

$$\text{a)}\quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}} \qquad \text{e} \qquad \text{b)}\quad f(x) = x^2 + 2x + 1.$$

a) O domínio, neste caso, é um subconjunto dos reais com as restrições: x deve ser diferente de -1 (-1 zera o denominador) bem como $x > -1$ uma vez que a raiz quadrada só está definida, nos reais, para números maiores do que ou igual (este deve ser excluído pela primeira restrição) a zero.

$$\text{Domínio} : \{x \in \mathbb{R}; \quad x > -1\} \quad = \quad]-1, \infty[$$

b) Não temos restrições: Domínio = $\{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$.

DEFINIÇÃO 6.1.8. INTERCEPTOS

Interceptos são os pontos de interseção (pode ser um só) do gráfico da função com os eixos. A interseção com o eixo x é o ponto de coordenadas $(x,0)$ enquanto o de interseção com o eixo y é o ponto de coordenadas $(0,y)$.

EXEMPLO 6.7. EIXOS DAS ABSCISSAS E ORDENADAS

O gráfico da função $y(x) = x^2+1$ não intercepta o eixo das abscissas pois não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2+1 = 0$ enquanto o eixo y é interceptado no ponto $(0,1)$.

DEFINIÇÃO 6.1.9. FUNÇÕES CRESCENTE E DECRESCENTE

Consideremos um intervalo fechado $[a,b]$ e $x \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x \leq b$, bem como dois elementos deste intervalo x_1 e x_2, satisfazendo a desigualdade $x_1 < x_2$. Temos

$$\begin{array}{rcl} \text{Se } \mathsf{f}(x_1) < \mathsf{f}(x_2) & \Longrightarrow & \text{Função crescente} \\ \text{Se } \mathsf{f}(x_1) > \mathsf{f}(x_2) & \Longrightarrow & \text{Função decrescente} \end{array}$$

Se a função tiver a mesma imagem em todos os pontos do intervalo ela é chamada constante no referido intervalo. Ainda mais, se uma função, num particular intervalo, é

$$\begin{array}{rcl} \text{Crescente ou constante} & \Longrightarrow & \text{Função não decrescente} \\ \text{Decrescente ou constante} & \Longrightarrow & \text{Função não crescente} \end{array}$$

Uma função de qualquer um destes quatro tipos, conforme DEFINIÇÃO 6.1.9, é chamada monótona. A fim de tornar a nomenclatura mais robusta dizemos: nos dois primeiros casos, inserindo a palavra estritamente, isto é: estritamente monótona crescente e estritamente monótona decrescente, enquanto nos dois últimos dizemos monótona não crescente e monótona não decrescente.

EXEMPLO 6.8. ESBOÇO DE UM GRÁFICO

Esboce o gráfico da função

$$\mathsf{f}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ x & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

e justifique se ela é não decrescente.

Sim, é não decrescente, pois no intervalo $0 \leq x \leq 1$ ela é constante, enquanto no intervalo $x > 1$ é sempre crescente. Ver Figura 6.3.

DEFINIÇÃO 6.1.10. TESTE DA RETA VERTICAL

Uma curva no plano xy é o gráfico de uma função de x se, e somente se, nenhuma reta vertical intercepta a curva mais de uma vez.

DEFINIÇÃO 6.1.11. PONTOS DE MÁXIMO E MÍNIMO

Seja f uma função definida no domínio $\mathcal{D}$. Dizemos que x_0 é um ponto de máximo relativo [ponto de mínimo relativo] se existir um intervalo aberto $\mathcal{A}$, com centro em x_0 tal que

$$\mathsf{f}(x) \leq \mathsf{f}(x_0) \quad [\mathsf{f}(x) \geq \mathsf{f}(x_0)] \qquad \text{para todo} \qquad x \in \mathcal{A} \cap \mathcal{D}.$$

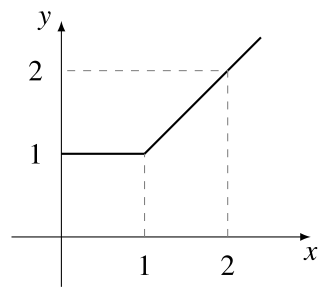


Figura 6.3: Esboço gráfico.

Costuma-se excluir a palavra relativo de modo que temos apenas a nomenclatura ponto de máximo e ponto de mínimo. Note que estes conceitos estão relacionados com a vizinhança do ponto. Se, por outro lado, considerarmos todo o domínio, introduzimos o conceito de ponto de máximo [mínimo] absolutos, isto é,

$$\mathsf{f}(x) \leq \mathsf{f}(x_0) \quad [\mathsf{f}(x) \geq \mathsf{f}(x_0)] \qquad \text{para todo} \qquad x \in \mathcal{D}$$

DEFINIÇÃO 6.1.12. SINAL DE UMA FUNÇÃO

Estudar o sinal de uma função significa determinar os valores de $x \in \mathcal{D}$ para os quais tenhamos as possibilidades $y > 0$, $y < 0$ e $y = 0$. Note que no último caso, $y = 0$, estamos determinando as interseções (se existirem) com o eixo das abscissas, isto é pontos da forma $(a, 0)$ com $a \in \mathcal{D}$.

Exemplos de pontos de máximo (mínimo) e o sinal da função são discutidos especificamente quando do estudo de uma particular função.

6.1.3 Propriedades

Algumas propriedades para funções, no caso geral, merecem destaque. Vamos introduzir o conceito de paridade e maneiras de combinar funções.

DEFINIÇÃO 6.1.13. PARIDADE E SIMETRIA

Se uma função f satisfizer a igualdade $\mathsf{f}(-x) = \mathsf{f}(x)$ para todo x em seu domínio, então f é dita uma função par. Geometricamente, o gráfico é simétrico em relação ao eixo y. Se conhecemos para $x \geq 0$ basta refletir em torno do eixo y.

Por outro lado, se uma função f satisfizer a igualdade $\mathsf{f}(-x) = -\mathsf{f}(x)$ para todo x em seu domínio, então f é dita uma função ímpar. Geometricamente, o gráfico é simétrico em relação à origem. Se conhecemos para $x \geq 0$ basta girar de 180°em torno da origem.

EXEMPLO 6.9. PARIDADE

Dadas as funções $\mathsf{f}_1(x) = 3x^3$ e $\mathsf{f}_2(x) = x^2 + 1$ com $x \in \mathbb{R}$, justifique que a primeira é uma função ímpar e a segunda é uma função par.

Consideremos $-x$ em f_1. Temos $\mathsf{f}_1(-x) = (-x)^3$, isto é no lugar de x substituímos por $-x$. Simplificando temos

$$\mathsf{f}_1(-x) = -3x^3 = -\mathsf{f}_1(x)$$

isto é, uma função ímpar. Analogamente para $\mathsf{f}_2(x)$. Substituindo $-x$ no lugar de x temos

$$\mathsf{f}_2(-x) = (-x)^2 = x^2 = \mathsf{f}_2(x)$$

isto é, uma função par.

A fim de combinarmos duas funções, vamos destacar duas possibilidades, a saber: a) utilizando os sinais de adição, subtração, multiplicação e divisão, quando devidamente permitidas e b) compondo.

DEFINIÇÃO 6.1.14. COMBINAÇÃO DE FUNÇÕES

Definimos a adição, subtração, multiplicação e divisão de duas funções f_1 e f_2 de tal modo que sendo o domínio de f_1 igual ao conjunto $\mathcal{A}$ e o de f_2 igual ao conjunto $\mathcal{B}$, então o domínio da operação deve ser $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, lembrando que no caso da divisão, devemos impor $\mathsf{f}_2(x) \neq 0$.

DEFINIÇÃO 6.1.15. FUNÇÃO COMPOSTA

Dadas duas funções f e g, a função composta é definida por $(\mathsf{f} \circ \mathsf{g})(x) = \mathsf{f}[\mathsf{g}(x)]$ sendo que o domínio de $\mathsf{f} \circ \mathsf{g}$ é o conjunto de todos os x no domínio de g tal que $\mathsf{g}(x)$ está no domínio de f, isto é, $\mathsf{f} \circ \mathsf{g}$ está definida sempre que g e $\mathsf{f}(\mathsf{g})$ estiverem definidas. Note que $\mathsf{f} \circ \mathsf{g}$ indica que primeiro aplicamos g e depois f.

DEFINIÇÃO 6.1.16. FUNÇÃO INVERSA

Seja f uma função bijetora (um-a-um, nos dois sentidos) com domínio $\mathcal{A}$ e imagem $\mathcal{B}$. Então sua função inversa, denotada por f^{-1} tem domínio $\mathcal{B}$ e imagem $\mathcal{A}$, definida por

$$\mathsf{f}^{-1}(y) = x \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathsf{f}(x) = y$$

para todo y em $\mathcal{B}$.

A partir de agora começamos o estudo de funções particulares iniciando o estudo pela mais simples, a função afim. Aplicações em alguns ramos da ciência serão apresentados no texto.

6.1.4 Função afim

Existem várias maneiras de se apresentar a função afim. Aqui, optamos por discutir um modo conveniente para associar o seu gráfico com uma reta, o que vamos fazer através de um exemplo elucidadivo, imediatamente após a definição.

DEFINIÇÃO 6.1.17. FUNÇÃO AFIM

Uma função $\mathsf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se afim se existirem constantes $m, n \in \mathbb{R}$ tais que $\mathsf{f}(x) = mx + n$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

EXEMPLO 6.10. TAXA DE CRESCIMENTO $\times$ INCLINÇÃO DA RETA

Admitamos conhecidos os valores de $\mathsf{f}(x_1)$ e $\mathsf{f}(x_2)$ que a função exibe em dois pontos distintos (porém arbitrários) x_1 e x_2. Temos

$$\mathsf{f}(x_1) = mx_1 + n \qquad \text{e} \qquad \mathsf{f}(x_2) = mx_2 + n$$

de onde, subtraindo uma da outra, segue

$$m = \frac{\mathsf{f}(x_2) - \mathsf{f}(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Dados $x, x+h \in \mathbb{R}$, com $h \neq 0$, o número $m = [\mathsf{f}(x+h) - \mathsf{f}(x)]/h$ chama-se a taxa de crescimento (ou taxa de variação) da função f no intervalo de extremos $x, x+h$.

Na prática, sabendo que $\mathsf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é afim e que $\mathsf{f}(x_1) = y_1$ e $\mathsf{f}(x_2) = y_2$ com $x_1 \neq x_2$, queremos determinar os coeficientes m e n de modo que se tenha $\mathsf{f}(x) = mx + n$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Do acima, o valor de m está determinado. A fim de determinar o valor de n, é costume utilizar o intercepto no eixo vertical, isto é, considerar $x = 0$, logo $\mathsf{f}(0) = n$.

O gráfico de uma função afim é uma reta não paralela ao eixo y. Chamamos m de coeficiente angular (também chamado inclinação uma vez que podemos mostrar se tratar do valor da tangente do ângulo que a reta forma com o eixo das abscissas) e n de coeficiente linear (também chamado valor inicial).

$\boxed{\text{Taxa de variação de uma função} \diamond \text{Coeficiente angular de uma reta}}$

Em resumo: Sejam $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, com $x_1 \neq x_2$. Existe uma, e somente uma, função afim $\mathsf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\mathsf{f}(x_1) = y_1$ e $\mathsf{f}(x_2) = y_2$.

O gráfico de uma função afim é uma reta não vertical, isto é, não paralela ao eixo Oy e reciprocamente: Toda reta não vertical r é o gráfico associado a uma função afim.

EXEMPLO 6.11. CASOS PARTICULARES

A tabela a seguir destaca quatro casos particulares de uma função afim, conforme os parâmetros m e n.

$\mathsf{f}(x) = n$	Função constante
$\mathsf{f}(x) = mx$	Função linear
$\mathsf{f}(x) = x + n$	Translações
$\mathsf{f}(x) = x$	Função identidade

EXEMPLO 6.12. EQUAÇÃO DA RETA

Sejam $a \in \mathbb{R}^*$ e $b, c \in \mathbb{R}$. Chama-se equação da reta na forma geral a equação $ay + bx + c = 0$. a) Escreva a equação da reta na chamada forma reduzida e b) Obtenha a equação da reta passando por um ponto (x_0, y_0).

a) A forma reduzida expressa a equação da reta em termos dos coeficientes angular e linear. Então, isolando y e dividindo por a podemos escrever

$$y = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}$$

ou ainda, introduzindo os parâmetros $m = -b/a$ e $n = -c/a$ obtemos

$$y = mx + n$$

a chamada equação da reta na forma reduzida.

b) Sabendo que a reta passa pelo ponto (x_0, y_0), substituímos na equação da reta na forma reduzida, $y_0 = mx_0 + n$. Subtraindo uma da outra e rearranjando, temos

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

que representa a equação da reta com a imposição de passar pelo ponto (x_0, y_0).

Das várias aplicações da função afim, dentre elas a equação da velocidade no movimento uniformemente variado, vamos destacar um exemplo advindo da Economia. Para tal, antes de discutir o exemplo propriamente dito, devemos introduzir a nomenclatura apropriada.

Consideremos uma empresa que lança no mercado uma quantidade x de unidades por mês. Para tal demanda a empresa tem um custo fixo (aquele que não depende da quantidade produzida) e um custo variável (parcela que depende de x). A soma dos custos fixo e variável chamamos de custo e indicamos com a letra $C(x)$. Por outro lado, chamamos de receita ao produto de x pelo preço de venda e indicamos por $R(x)$. O chamado lucro é definido como a diferença entre a receita e o custo, dado por $L(x) = R(x) - C(x)$.

EXEMPLO 6.13. CUSTO × RECEITA × LUCRO

Admitamos, para efeito de análise, o seguinte: x é a quantidade [se a quantidade não for divisível, vamos ter um domínio discreto enquanto se for divisível, vamos ter um domínio contínuo] e $\mathsf{C}(x)$, dado em reais, é o custo. Então, definimos uma função custo, denotada por C, tal que

$$\mathsf{C} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \qquad \mathsf{C}(x) = 100 + 8x$$

isto é, $\mathsf{C}(0) = 100$ é o custo fixo enquanto R\$8,00 é o custo variável, por unidade. Ainda mais, admita também, que o preço por unidade é constante e igual a R\$10,00 de onde podemos escrever para a função receita, denotada por R,

$$\mathsf{R} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \qquad \mathsf{R}(x) = 10x.$$

a) Esboçar, num mesmo sistema de eixos, os gráficos $\mathsf{C}(x) \times x$; $\mathsf{R}(x) \times x$ e $\mathsf{L}(x) \times x$ onde L é a função lucro e b) Discutir os casos de lucro e prejuízo.

a) O gráfico é como na Figura 6.4. b) Da Figura conclui-se que: para a quantidade maior que 50 temos lucro, caso contrário, prejuízo.

EXEMPLO 6.14. CELSIUS × FAHRENHEIT

A escala Celsius de temperatura é tal que: ponto de congelemento da água 0^0C e ponto de ebulição da água 100^0C. É uma escala centígrada. Por outro lado, a escala Fahrenheit tem os correspondentes pontos tais que 32^0F e 212^0F, respectivamente. a) Escreva uma relação entre as duas escalas. b) Se dobrarmos a temperatura na escala Celsius, o mesmo ocorre na escala Fahrenheit? Justifique.

a) Utilizando o teorema de Tales e da Figura 6.5, podemos escrever

$$\frac{t_C - 0}{100 - 0} = \frac{t_F - 32}{212 - 32}$$

de onde segue, já simplificando $t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32)$, explicitando Celsius em termos de Fahrenheit e $t_F = \frac{9}{5}t_C + 32$, explicitando Fahrenheit em termos de Celsius. b) Não, pois a relação não é linear.

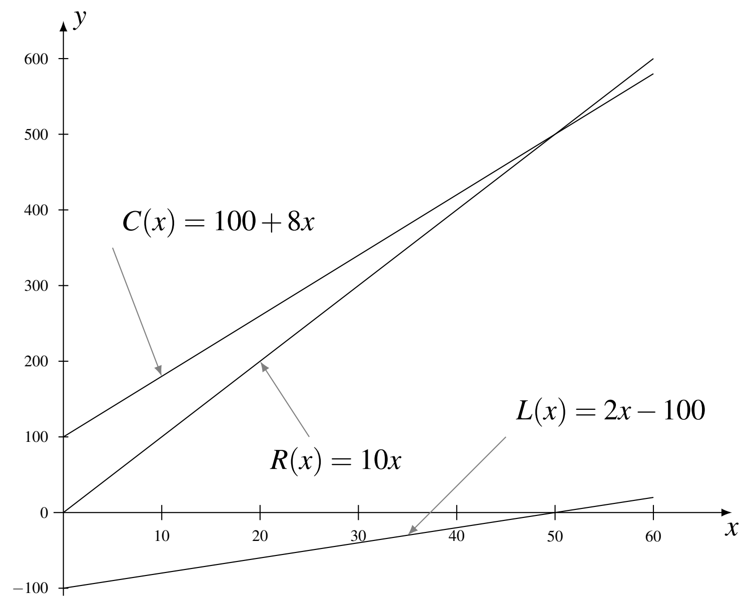


Figura 6.4: Custo × receita × lucro.

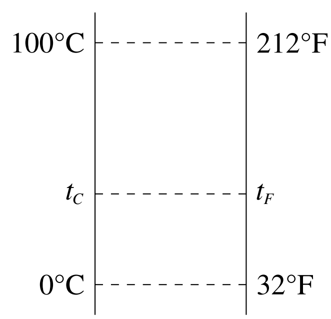


Figura 6.5: Celsius × Fahrenheit.

6.2 Função linear

A função linear é o modelo matemático associado aos problemas de proporcionalidade. Uma proporcionalidade é uma função $\mathsf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para quaisquer números reais c, x tem-se $\mathsf{f}(cx) = c\mathsf{f}(x)$ [proporcionalidade direta] ou $\mathsf{f}(cx) = \frac{1}{c}\mathsf{f}(x)$, se $c \neq 0$ [proporcionalidade inversa].

Então, dizer que uma grandeza y é diretamente proporcional à uma grandeza x quando existe um número a (constante de proporcionalidade) tal que $y = ax$ para todo valor de x. No caso de proporcionalidade inversa só tem sentido se as grandezas são não nulas.

EXEMPLO 6.15. PROPORCIONALIDADE

Seja a a constante de proporcionalidade (vamos omitir o termo diretamente). Explicitamente: Se um quilo de arroz custa a reais então x quilos custam $y = ax$. Isto é, um aumento de x acarreta um aumento de y.

EXEMPLO 6.16. REGRA DE TRÊS

Quando a correspondência $x \mapsto y$, $x' \mapsto y'$, é uma proporcionalidade, a igualdade $y'/x' = y/x$ permite que se determine um desses quatro números quando conhecidos os outros três.

EXEMPLO 6.17. GRÁFICO DE $\mathsf{f}(x) = 1 + |x+1|$.

Seja $\mathsf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $\mathsf{f}(x) = 1 + |x+1|$. Vamos esboçar o gráfico de $\mathsf{f} \times x$, conforme Figura 6.6. Note que para $x \geq -1$ basta que eliminemos o módulo enquanto para $x \leq -1$ devemos trocar o sinal.

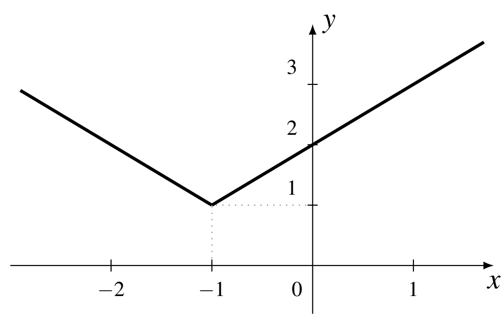


Figura 6.6: Gráfico de $\mathsf{f}(x) = 1 + |x+1|$.

6.2.1 Funções poligonais

Diz-se que $\mathsf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função poligonal quando existem $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ tais que para, $x \leq t_0$, para $x \geq t_n$ e em cada um dos intervalos $[t_{i-1}, t_i]$, a função f coincide com uma função afim f_i.

Para evitar uma possível descontinuidade, exige-se que

$$\mathsf{f}_i(t_i) = \mathsf{f}_{i-1}(t_{i-1}).$$

O protótipo da função poligonal é uma função $\mathsf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\mathsf{f}(x) = |x|$ ou $\mathsf{f}(x) = |x - c|$ para algum $c \in \mathbb{R}$.

6.3 Função quadrática

Nessa seção vamos apresentar a chamada função quadrática destacando a identificação com um trinômio do segundo grau, bem como discutir o que é conhecido como soma e produto das raízes de uma equação do segundo grau para, enfim, apresentar uma discussão envolvendo uma parábola.

DEFINIÇÃO 6.3.1. FUNÇÃO QUADRÁTICA

Uma função $\mathsf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se quadrática quando existirem números reais, a, b, c, com $a \neq 0$, chamados coeficientes, tais que $\mathsf{f}(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Observemos que os coeficientes a, b, c da função quadrática f ficam inteiramente determinados pelos valores que essa função toma. Em outras palavras, se $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ para todo $x \in \mathbb{R}$ então $a = a'$, $b = b'$ e $c = c'$. Esta observação permite que identifiquemos uma função quadrática com um trinômio do segundo grau. Note a diferença pois, um trinômio é, apenas, o mesmo que um terno ordenado de números reais. A cada trinômio do segundo grau corresponde a função quadrática definida por $x \mapsto ax^2+bx+c$ e que esta correspondência é biunívoca.

Então, a partir de agora, identificamos a função quadrática com o trinômio do segundo grau a ela associado e nos permitimos falar da função

$$\mathsf{f}(x) = ax^2+bx+c$$

sempre que não houver confusão com o respectivo número real $\mathsf{f}(x)$ que é o valor obtido por ela no ponto x.

TEOREMA 6.3.1. NÚMEROS REAIS E A FUNÇÃO QUADRÁTICA

Sejam x_1, x_2, x_3 três números reais distintos e três números reais y_1, y_2, y_3 distintos tais que os pontos $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ são não colineares em $\mathbb{R}^2$. Existe uma, e somente uma, função quadrática $\mathsf{f}(x) = ax^2+bx+c$ tal que $\mathsf{f}(x_1) = y_1$, $\mathsf{f}(x_2) = y_2$ e $\mathsf{f}(x_3) = y_3$.

6.3.1 Soma e produto

Vamos recordar a relação entre as raízes de uma equação do segundo grau com sua soma e seu produto, através de um exemplo característico. Este é um problema bastante antigo e pode ser enunciado como no exemplo a seguir.

EXEMPLO 6.18. LADOS DE UM TRIÂNGULO

Determine os lados de um retângulo onde são conhecidos o semiperímetro e a área.

Sejam x_1 e x_2 os lados de um retângulo. Podemos escrever para o perímetro deste retângulo $x_1+x_2+x_1+x_2 = 2p$ (perímetro) de onde segue

$$x_1+x_2 = p \qquad \Longrightarrow \qquad x_2 = p - x_1$$

onde denotamos por p o semiperímetro. Sabendo que os lados do retângulo são dados por x e $p-x$, onde omitimos o índice, podemos escrever para a área deste retângulo, denotada por A, a expressão $A = x(p-x)$ de onde obtemos a seguinte equação do segundo grau

$$x^2 - px + A = 0.$$

É costume indicar pela letra S a soma das raízes de uma equação do segundo grau e por P o respectivo produto, de onde segue

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

6.3.2 A forma canônica do trinômio do segundo grau

Considere o trinômio do segundo grau onde, no segundo membro, adicionamos e subtraímos a mesma quantidade (completar quadrados)

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

ou ainda na forma (fatoração=trinômio quadrado perfeito)

$$ax^2+bx+x = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right].$$

Esta é a maneira de escrever o trinômio do segundo grau chamada forma canônica. Vejamos algumas de suas consequências.

• Em primeiro lugar, podemos escrever diretamente a fórmula que fornece as raízes da equação do segundo grau. Para tal, introduzimos a notação $\Delta = b^2-4ac$, chamado discriminante, e admitimos que $\Delta \geq 0$, caso contrário as raízes não são reais. Segue

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c=0 \quad &\iff \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \\ &\iff \quad x+\frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &\iff \quad x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \end{aligned}$$

• Como uma outra consequência, vamos associar as raízes da equação do segundo grau com a soma e produto dessas raízes. Denotemos por x_1 e x_2 tais raízes com $x_1 < x_2$. Calculemos a soma

$$x_1+x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a} = -S$$

Note que a média aritmética das raízes é $-b/2a$, ou seja, as raízes x_1 e x_2 são equidistantes do ponto $-b/2a$ que, como vamos ver mais adiante é a abscissa do vértice da parábola, representação gráfica de uma função quadrática.

Por outro lado, calculemos o produto

$$x_1\cdot x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} = P.$$

Voltando na expressão que relaciona a equação do segundo grau em termos de S e P, com os dados anteriores, podemos escrever

$$ax^2+bx+c = a(x^2-Sx+P) = a[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2] = a(x-x_1)(x-x_2),$$

que é a forma fatorada. Note que no caso em que $\Delta = 0$, a equação possui uma única raiz, chamada raiz dupla, igual a $-b/2a$.

Consideremos, a partir de agora, o caso em que $a > 0$. O estudo para o caso em que $a < 0$ é efetuado de maneira inteiramente análoga. Temos

$$\mathsf{f}(x) = ax^2+bx+x = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right],$$

que explicita, no interior dos colchetes, uma soma de duas parcelas. A primeira, dependente de x, é sempre positiva, enquanto a segunda parcela é constante. O menor valor desta soma é atingido quando

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0 \qquad \Longrightarrow \qquad x=-\frac{b}{2a}.$$

Neste ponto, $\mathsf{f}(x)$ também apresenta o seu valor mínimo. Portanto, para este valor, obtemos, substituindo-o na expressão para $\mathsf{f}(x)$

$$\mathsf{f}\left(-\frac{b}{2a}\right)=c-\frac{b^2}{4a}=-\frac{\Delta}{4a}.$$

Por outro lado, no caso em que $a<0$ o valor de $\mathsf{f}\left(-\frac{b}{2a}\right)$ é o maior dos números $\mathsf{f}(x)$, para qualquer $x\in\mathbb{R}$, onde apresenta o seu valor máximo.

• Enfim, a forma canônica ainda nos ajuda a responder a pergunta: Dada a função quadrática $\mathsf{f}(x)=ax^2+bx+c$, para quais valores de $x\neq x'$ tem-se $\mathsf{f}(x)=\mathsf{f}(x')$?

A partir da forma canônica, vemos que $\mathsf{f}(x)=\mathsf{f}(x')$ se, e somente se,

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(x'+\frac{b}{2a}\right)^2$$

de onde segue, visto que $x\neq x'$,

$$x'+\frac{b}{2a}=-\left(x+\frac{b}{2a}\right)$$

ou ainda

$$\frac{x+x'}{2}=-\frac{b}{2a}.$$

Portanto, a função quadrática $\mathsf{f}(x)=ax^2+bx+c$ admite o mesmo valor $\mathsf{f}(x)=\mathsf{f}(x')$ para $x\neq x'$ se, e somente se, os pontos x e x' são equidistantes de $-b/2a$.

6.3.3 Gráficos (simetria vertical)

Aqui, vamos discutir apenas as parábolas com eixo de simetria vertical. Aquelas com simetria relativa ao eixo horizontal, vão voltar no Capítulo 9, quando apresentarmos o cálculo da área abaixo de uma curva.

Visto que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola, consideremos um ponto F, denominado foco da parábola e uma reta d, paralela ao eixo x, chamada diretriz, que não o contenha. A parábola é o conjunto dos pontos do plano que distam igualmente de F e de d.

A reta perpendicular à diretriz, baixada a partir do foco, chama-se eixo da parábola, enquanto o ponto da parábola mais próximo da diretriz é chamado vértice. Ele é o ponto médio do segmento cujas extremidades são o foco e a interseção do eixo, ponto D, com a diretriz. Ver Figura 6.7. Seja P um ponto qualquer pertencente à parábola. Da definição de parábola, podemos escrever

$$\overline{PF}=\overline{PQ}.$$

Note que a distância de um ponto a uma reta é o comprimento do segmento perpendicular baixado do ponto sobre a reta.

EXEMPLO 6.19. FOCO E DIRETRIZ DA PARÁBOLA

Seja $a \in \mathbb{R}^*$. Justifique a afirmativa: o gráfico da função quadrática $\mathsf{f}(x) = ax^2$ é a parábola com foco em $F(0, 1/4a)$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = -1/4a$.

A fim de justificar a afirmação, consideremos um ponto $P(x,y) = P(x, ax^2)$ pertencente a parábola e vamos calcular o quadrado das distâncias $\overline{PF}$ e $\overline{PQ}$. Temos, então

$$\begin{array}{rcl} \overline{PF} & \Longrightarrow & (x-0)^2 + (ax^2 - 1/4a)^2 \\ \overline{PQ} & \Longrightarrow & [ax^2 - (-1/4a)]^2 = (ax^2 + 1/4a)^2 \end{array}$$

Da definição de parábola, devemos verificar que estas duas quantidades são iguais o que é imediato de ser efetuado. Enfim, note que se $a > 0$ a parábola tem concavidade voltada para cima, caso contrário, $a < 0$, voltada para baixo.

EXEMPLO 6.20. VÉRTICE E DIRETRIZ

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$. Determine as coordenadas do vértice, as coordenadas do foco e a equação da diretriz, associadas à parábola $\mathsf{f}(x) = ax^2 + bx + c$.

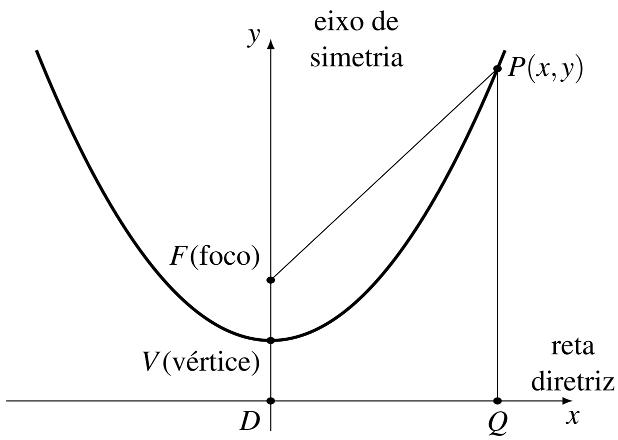


Figura 6.7: Parábola. Vértice, foco e diretriz.

Primeiramente as coordenadas do vértice. Lembrando que $\mathsf{f}(x) = \mathsf{f}(x')$ se, e somente se, os pontos são simétricos em relação a $-b/2a$, significa que a reta vertical $x = -b/2a$ é um eixo de simetria do gráfico de f, ou ainda, é o eixo dessa parábola, de onde segue-se que a abscissa do vértice é $x_V = -b/2a$. Substituindo-se este valor em $\mathsf{f}(x_V) = y_V$, concluímos que a ordenada do vértice é $y_V = -\Delta/4a$ onde $\Delta = b^2 - 4ac$. Logo o ponto V, vértice da parábola, é tal que

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right).$$

Por outro lado, visto que o vértice é o ponto mais próximo da diretriz e que é o ponto médio dos segmentos cujas extremidades são o foco e a interseção do eixo com a diretriz temos

$$x_V = \frac{x_F + x_D}{2} = -\frac{b}{2a} \qquad \text{e} \qquad y_V = \frac{y_F + y_D}{2} = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Então, podemos concluir que $x_F = x_D = -b/2a$ (mesma abscissa) enquanto, a partir da igualdade $d_{FV}^2 = d_{DV}^2$, temos $y_F + y_D = -\Delta/2a$.

Passemos agora a calcular as coordenadas do foco. Sejam $F(x_F, y_F)$, $V(x_V, y_V)$ e $D(x_D, y_D)$ os pontos de coordenadas do foco, do vértice e da interseção do eixo de simetria com a diretriz, respectivamente.

Logo, as coordenadas do foco são

$$F\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta - 1}{4a}\right)$$

enquanto as coordenadas do ponto D são dadas por

$$D\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta + 1}{4a}\right).$$

Enfim, a equação da reta diretriz é tal que

$$y = -\frac{\Delta + 1}{4a}$$

isto é, uma reta paralela ao eixo das abscissas.

6.3.4 Translações

Mencionamos anteriormente as chamadas translações horizontal e vertical, do gráfico de uma parábola associada à função quadrática. No caso geral temos:

DEFINIÇÃO 6.3.2. TRANSLAÇÃO HORIZONTAL

Seja $m \in \mathbb{R}$. A translação horizontal $(x, y) \mapsto (x + m, y)$ aplicada ao gráfico da função $\mathsf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, fornece o gráfico da função $\mathsf{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $\mathsf{g}(x) = \mathsf{f}(x - m)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Com efeito, um ponto qualquer $(x, \mathsf{f}(x))$ do gráfico de f é transformado por esta translação no ponto $(x + m, \mathsf{f}(x))$. Escrevendo $\bar{x} = x + m$, de onde $x = \bar{x} - m$, vemos que a translação considerada transforma cada ponto $(x, \mathsf{f}(x))$ do gráfico de f no ponto $(\bar{x}, \mathsf{f}(\bar{x} - m)) = (\bar{x}, \mathsf{g}(\bar{x}))$ do gráfico de g.

DEFINIÇÃO 6.3.3. TRANSLAÇÃO VERTICAL

Seja $k \in \mathbb{R}$. A translação vertical $(x, y) \mapsto (x, y + k)$ transforma o gráfico da função $\mathsf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no gráfico da função $\mathsf{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\mathsf{h}(x) = \mathsf{f}(x) + k$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Com efeito, esta translação leva cada ponto $(x, \mathsf{f}(x))$ do gráfico de f no ponto $(x, \mathsf{f}(x) + k) \mapsto (x, \mathsf{h}(x))$ do gráfico de h.

Enfim, podemos concluir: Se $a' = \pm a$ então os gráficos das funções $\mathsf{f}(x) = ax^2 + bx + c$ e $\mathsf{g}(x) = a'x^2 + b'x + c'$ são parábolas congruentes. Quando $a' = a$ transformamos uma dessas parábolas na outra por meio de uma translação horizontal seguida de uma translação vertical. Por outro lado, se $a' = -a$, deve-se acrescentar ainda a reflexão em torno do eixo Ox.

Vale a recíproca: Se os gráficos das funções $\mathsf{f}(x) = ax^2 + bx + c$ e $\mathsf{g}(x) = a'x^2 + b'x + c'$ são parábolas congruentes então $a' = \pm a$.

6.3.5 Ângulo entre curvas

O ângulo entre uma reta e uma curva que se interceptam no ponto P é, por definição, o ângulo entre esta reta e a tangente à curva traçada pelo ponto de interseção.

A tangente a uma parábola no ponto P é a reta que tem em comum com a parábola esse único ponto P e tal que todos os demais pontos da parábola estão no mesmo lado dessa reta.

TEOREMA 6.3.2. PARÁBOLA E RETA TANGENTE

Se a parábola é o gráfico da função $\mathsf{f}(x) = ax^2 + bx + c$, sua tangente no ponto $P(x_0, y_0)$, onde $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$ é a reta que passa por esse ponto e tem inclinação igual a $2ax_0 + b$.

PROVA. Para provar o teorema vamos mostrar que todos os pontos dessa parábola que têm abscissa diferente de x_0 estão fora da reta mencionada e no mesmo semiplano determinado por ela.

Seja $a > 0$. A parábola, neste caso, se situa acima de todas as suas tangentes. Mostremos que, para todo $x \neq x_0$, o ponto (x, y) da parábola, com $y = ax^2 + bx + c$ está acima do ponto $(x, y_0 + (2ax_0 + b)(x - x_0))$, de mesma abscissa x, situado sobre a reta. Em outras palavras, basta mostrar que:

$$x \neq x_0 \Longrightarrow ax^2 + bx + c > ax_0^2 + bx_0 + c + (2ax_0 + b)(x - x_0).$$

Então, podemos escrever da expressão anterior, para $x \neq x_0$,

$$ax^2 + bx + c - [ax_0^2 + bx_0 + c + (2ax_0 + b)(x - x_0)] = a(x - x_0)^2 > 0.$$

Isso mostra que a reta de inclinação $2ax_0 + b$ que passa pelo ponto (x_0, y_0), com $y_0 = \mathsf{f}(x_0)$, tem este único ponto em comum com a parábola que é o gráfico de f e que todos os pontos da parábola estão acima desta reta. Logo, esta reta é tangente à parábola neste ponto. Uma análise similar pode ser feita para o caso $a < 0$.

6.3.6 Função polinomial

Diz-se que $\mathsf{p} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função polinomial quando existem números reais $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tais que, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\mathsf{p}(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Se $a_n \neq 0$, dizemos que $\mathsf{p}(x)$ tem grau n. Note que, conforme mencionamos no caso de uma função quadrática vamos, aqui, identificar uma função polinomial com um polinômio de grau n e nos permitimos falar da função $\mathsf{p}(x)$ sempre que não houver confusão com o respectivo número real $\mathsf{p}(x)$ que é o valor obtido por ela no ponto x. Note que uma função não tem grau e sim o polinômio a ela associado. Dizer que o grau de uma função é n é abuso de linguagem que, muitas vezes usamos desde que tenhamos em mente que n é o grau do polinômio e não da função.

Em particular, se α é uma raiz, isto é, $\mathsf{p}(\alpha) = 0$ temos

$$\mathsf{p}(x) = (x - \alpha)\mathsf{q}(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Portanto, α é uma raiz de p se, e somente se, $\mathsf{p}(x)$ é divisível por $x - \alpha$. Em geral, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ são raízes de p se, e somente se, para todo $x \in \mathbb{R}$ vale

$$\mathsf{p}(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_k)\mathsf{q}(x)$$

onde q é uma função polinomial de grau $n-k$ se p tem grau n. Disto, podemos concluir que: Uma função polinomial de grau n (note o abuso de liguagem) não pode ter mais do que n raízes

Uma função polinomial p é chamada identicamente nula quando se tem $\mathsf{p}(x)=0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Em analogia à função quadrática, dizemos que duas funções polinomiais são iguais, para todo $x \in \mathbb{R}$, se têm os mesmos coeficientes.

Ainda mais, o esboço do gráfico de uma função polinomial, em geral, será estudado após o conhecimento de ferramentas advindas do cálculo, em particular, limites, que serão discutidos no Capítulo 7 e derivadas, apresentadas no Capítulo 8, conforme já mencionamos.

DEFINIÇÃO 6.3.4. FUNÇÃO RACIONAL

Define-se função racional como sendo toda função cuja imagem é o quociente de dois polinômios, sendo o denominador um polinômio não nulo.

EXEMPLO 6.21. FUNÇÃO RECÍPROCA

Um caso particular de função racional é a chamada função recíproca. Considere a função $\mathsf{f}(x)=\frac{1}{x}$. a) Obtenha os conjuntos domínio e imagem e b) esboce o gráfico de $\mathsf{f}(x) \times x$.

a) Domínio $x \in \mathbb{R}^*$ e Imagem $y \in \mathbb{R}^*$. b) Ver Figura 6.8.

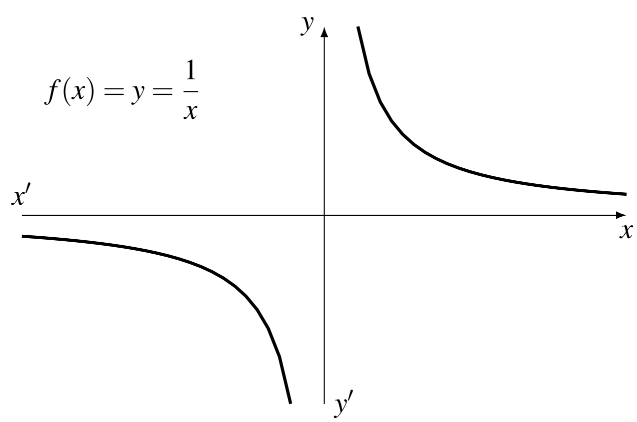


Figura 6.8: Hipérbole equilátera.

6.4 Função exponencial

Átomos de elementos radioativos são instáveis e espontaneamente se desintegram; crescimento de uma população de bactérias, dentre outros, são exemplos de modelos matemáticos conhecidos pelo nome de modelos (de crescimento ou decrescimento) exponenciais. A fim de estudar estes modelos devemos introduzir o conceito de função exponencial (vários autores preferem introduzir o conceito de logaritmo antes da exponencial) bem como o conceito de função logaritmo.

DEFINIÇÃO 6.4.1. FUNÇÃO EXPONENCIAL

Seja a um número real positivo e diferente de 1. A função exponencial de base a, $\mathsf{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, denotada por $\mathsf{f}(x)=a^x$, é definida de modo que satisfaça as seguintes propriedades, para quaisquer $x,y\in\mathbb{R}$:

$$
\begin{array}{lll}
\mathrm{P}_1 & a^x\cdot a^y=a^{x+y} & \\
\mathrm{P}_2 & a^1=a & \\
\mathrm{P}_3 & x<y\Longrightarrow a^x<a^y & \text{quando} \quad a>1 \text{ e} \\
 & x<y\Longrightarrow a^y<a^x & \text{quando} \quad 0<a<1.
\end{array}
$$

Se uma função $\mathsf{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ admite a propriedade P_1, isto é, $\mathsf{f}(x+y)=\mathsf{f}(x)\cdot\mathsf{f}(y)$, então f não admite o valor 0 exceto se a função f for identicamente nula.

Ainda mais, se $\mathsf{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ admite a propriedade P_1 e não é identicamente nula então $\mathsf{f}(x)>0$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

Logo, diante da propriedade P_1, tanto faz afirmar que o contradomínio de f é $\mathbb{R}$ como que é $\mathbb{R}_+$. A vantagem de considerarmos $\mathbb{R}_+$ é que teremos sempre a função f sobrejetiva.

Se uma função $\mathsf{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ admite as propriedades P_1 e P_2 então, para todo $n\in\mathbb{N}$, tem-se

$$\mathsf{f}(n)=\mathsf{f}(1+1+\cdots+1)=\mathsf{f}(1)\cdot\mathsf{f}(1)\cdots\mathsf{f}(1)=a\cdot a\cdots a=a^n.$$

Estendendo o resultado para todo número racional $r=m/n$ com $n\in\mathbb{N}$ devemos ter, pela definição de raiz enésima,

$$\mathsf{f}(r)=a^r=\sqrt[n]{a^m}.$$

Portanto, $\mathsf{f}(r)=a^r$ é a única função $\mathsf{f}:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}_+$ tal que $\mathsf{f}(r+s)=\mathsf{f}(r)\cdot\mathsf{f}(s)$ para quaisquer $r,s\in\mathbb{Q}$ e $\mathsf{f}(1)=a$.

A propriedade P_3 afirma que a função exponencial deve ser monótona injetiva (crescente quando $a>1$ e decrescente quando $0<a<1$), conforme Figura 6.9.

A função exponencial goza de outras propriedades que, a seguir, serão só mencionadas [11]:

- P_4 A função $\mathsf{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $\mathsf{f}(x)=a^x$ é ilimitada superiormente.
- P_5 A função exponencial é contínua.
- P_6 A função exponencial $\mathsf{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$, $\mathsf{f}(x)=a^x$, $a\neq 1$ é sobrejetiva.

A propriedade P_6 garante que para todo número real $b>0$ existe algum $x\in\mathbb{R}$ tal que $a^x=b$. [Todo número real positivo é uma potência de a].

EXEMPLO 6.22. JUROS COMPOSTOS

Uma grandeza com valor inicial C_0 e que cresça (por exemplo, crescimento de uma população, juros compostos, dentre outros) a uma taxa igual a k por unidade de tempo, então, após um tempo t, medido na mesma unidade de k, o valor dessa grandeza, C, será dado por

$$C(t)=C_0(1+k)^t.$$

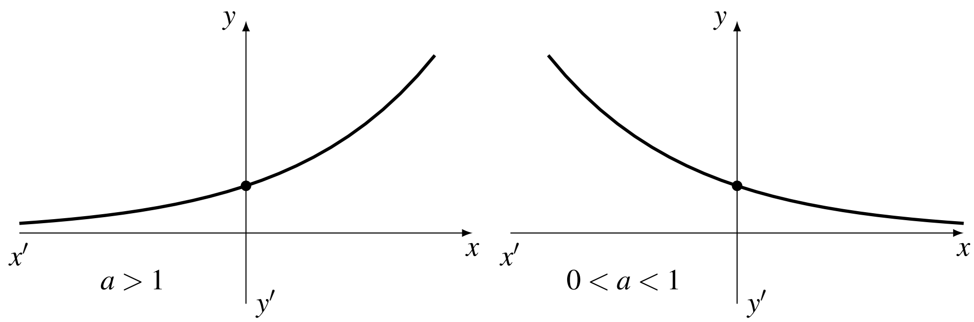


Figura 6.9: Exponencial $a > 1$ e $0 < a < 1$.

6.5 Função logarítmica

Conforme discutido anteriormente, para todo número real positivo $a \neq 1$, a função exponencial $\mathsf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $\mathsf{f}(x) = a^x$, é uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}_+$, crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$. Admitindo-se a propriedade adicional

$$\mathsf{f}(x+y) = \mathsf{f}(x) \cdot \mathsf{f}(y)$$

segue-se que f possui uma função inversa.

DEFINIÇÃO 6.5.1. FUNÇÃO LOGARÍTMICA

A inversa da função exponencial de base a é a função

$$\log_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},$$

que associa a cada número real positivo x o número real $\log_a x$: logaritmo de x na base a.

Por definição de função inversa tem-se

$$a^{\log_a x} = x \qquad \text{e} \qquad \log_a(a^x) = x.$$

Assim, $\log_a x$ é o expoente ao qual se deve elevar a base a para obter o número x, ou seja,

$$y = \log_a x \qquad \Longleftrightarrow \qquad a^y = x.$$

Segue-se imediatamente da relação $a^u \cdot a^v = a^{u+v}$ que

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

para x e y positivos quaisquer.

Esta propriedade de transformar produtos em somas foi a motivação original para a introdução dos logaritmos, no início do século XVII, e de suas propridades, até bem recente, como um eficiente instrumento de cálculo. Esta popularidade desmoronou com o advento das calculadores cada vez mais potentes. Ressaltamos que a importância dos logarítmos jamais desaparecerá, em particular, ela é a inversa da função exponencial, portanto equivalente a ela. São várias as situações onde se tem uma grandeza cuja taxa de variação é proporcional à quantidade da mesma existente no instante dado. Conforme mencionamos anteriormente, o decaimento radioativo é um exemplo tácito.

A função $\log_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ é uma função crescente para $a > 1$ e decrescente para $0 < a < 1$, conforme Figura 6.10. Ressalte-se que apenas números positivos possuem logaritmo real, pois a função $x \mapsto a^x$ somente admite valores positivos.

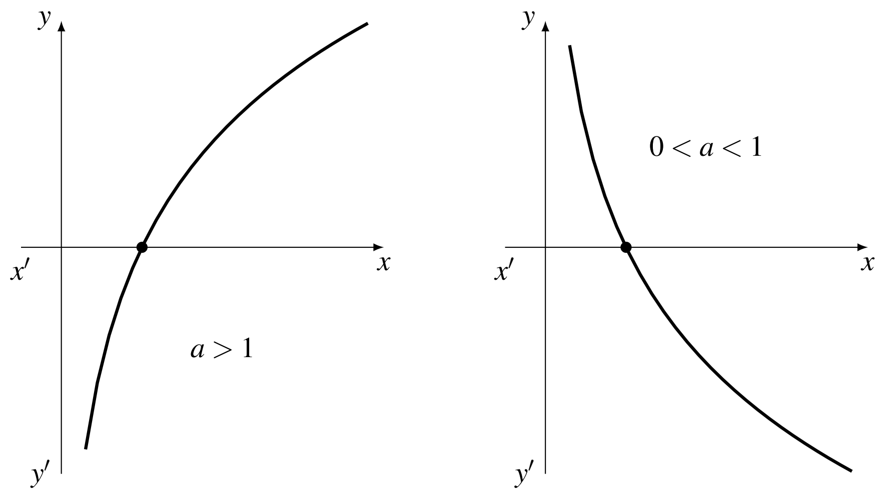


Figura 6.10: Logaritmo $a > 1$ e $0 < a < 1$.

6.5.1 Logaritmos naturais

Nesta seção, antes de apresentarmos, como um particular caso, os logaritmos naturais, vamos introduzir a função logarítmica ou um sistema de logaritmos no caso geral.

DEFINIÇÃO 6.5.2. FUNÇÃO LOGARÍTMICA. CASO GERAL.

Uma função real $\mathsf{L} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ cujo domínio é o conjunto $\mathbb{R}_+$ dos números reais positivos, chama-se uma função logarítmica ou um sistema de logaritmos quando apresenta as seguintes propriedades:

a) L é uma função crescente. $[x < y \Longrightarrow \mathsf{L}(x) < \mathsf{L}(y)]$.
b) $\mathsf{L}(xy) = \mathsf{L}(x) + \mathsf{L}(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_+$.

Para todo $x \in \mathbb{R}_+$, o número $\mathsf{L}(x)$ chama-se logaritmo de x.

Sabendo-se que a função logarítmica L é sobrejetiva, isto é, dado qualquer número real c, existe sempre um (único) número real positivo x tal que $\mathsf{L}(x) = c$, podemos afirmar que existe um único número real positivo cujo logaritmo natural é igual a 1. Tal número é representado pela letra e. Demonstra-se que este número e é irracional, ou seja, seu desenvolvimento decimal não termina nem é periódico. Um valor aproximado de e, com 6 algarismos é: $e \simeq 2,718281$.

DEFINIÇÃO 6.5.3. LOGARITMO NATURAL

Se a base é e temos que o sistema de logaritmos é conhecido pelo nome de sistema de logaritmos naturais com notação $\mathsf{L} = \log_e = \ln$. Do anterior, podemos afirmar que

$$\ln x = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = e.$$

Se a base dos logaritmos é 10, dizemos logaritmos decimais com notação $\mathsf{L} = \log_{10} = \log$, isto é, em geral, omitimos a base, neste caso.

6.5.2 Característica e mantissa

Dado um número positivo $x = a \cdot 10^n$ podemos escrever, tomando o logaritmo de ambos os lados, a expressão $\log x = \log a + \log(10^n)$. Como estamos usando o logaritmo na base 10, podemos escrever

$$\log x = \log a + n$$

Ora, sabendo que $1 \leq a < 10$, $\log a$ é um número compreendido entre $0 \leq \log a < 1$. Assim, se $x = a \cdot 10^n$, com $1 \leq a < 10$ e n inteiro, então

$$\log x = \log a + n \quad \text{com} \quad 0 \leq \log a < 1$$

Nestas condições, introduzimos a seguinte notação:

$$\begin{aligned} \log a &= \text{mantissa do logaritmo de } x \\ n &= \text{característica de } \log x \end{aligned}$$

6.5.3 Função exponencial na base e

O número e, base dos logaritmos naturais, foi introduzida como o número que satisfaz a igualdade $\ln x = 1$. Devida a sua importância, antes de discutir a função exponencial na base e, vamos mostrar que ele pode ser definido através de um limite, chamado limite fundamental.

DEFINIÇÃO 6.5.4. LIMITE FUNDAMENTAL

Vamos mostrar que vale o resultado, conhecido como um limite fundamental, conforme será estudado, no Capítulo 7

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Vamos utilizar o resultado do Exercício 40, o qual dividimos por x, $x > 0$, a fim de obter

$$\frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1.$$

Introduzindo a mudança $x = 1/n$ e rearranjando temos

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}} < \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} < 1$$

ou ainda, utilizando a propriedade dos logaritmos (potenciação), na seguinte forma

$$\frac{n}{1+n} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1.$$

Utilizando a inversa, isto é, exponenciando (base e) obtemos

$$e^{\frac{n}{1+n}} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e.$$

Tomando o limite $n \to \infty$ obtemos
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$
Em completa analogia podemos mostrar que
$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$
bem como
$$e^{\alpha} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n.$$
DEFINIÇÃO 6.5.5. FUNÇÃO EXPONENCIAL

A função exponencial $x \mapsto e^x$, de base e, pode ser definida por meio do limite
$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n,$$
ou, então, geometricamente pelo fato de que $y = e^x$ é o único número real positivo tal que a área da faixa[1] da hipérbole, H_1^y, é igual a x.

6.5.4 Derivada. Um aceno.

Vamos, enfim, introduzir o conceito de derivada de uma função, através da taxa de crescimento, visto ser este conceito o responsável por um número muito grande de aplicações, em particular, quando estudamos crescimento ou decrescimento de alguma grandeza. A derivada é a noção fundamental do Cálculo Infinitesimal. Ressaltamos que a discussão, apesar de geral, conforme será visto, restringir-se-á à função exponencial, visto que a taxa instantânea de crescimento é, em cada ponto, proporcional ao valor da função naquele ponto.

A taxa de crescimento de uma função f no intervalo de origem x e extremidade $x+h$ é, por definição, o quociente
$$\frac{\mathsf{f}(x+h)-\mathsf{f}(x)}{h}.$$
Este quociente pode também ser interpretado como a inclinação da reta secante, conforme Figura 6.11, que liga os pontos $(x,\mathsf{f}(x))$ e $(x+h,\mathsf{f}(x+h))$.

No particular caso da função exponencial $\mathsf{f}(x) = b\,e^{\alpha x}$ com b e α reais, temos
$$\frac{\mathsf{f}(x+h)-\mathsf{f}(x)}{h} = b\,e^{\alpha x}\frac{e^{\alpha h}-1}{h} = \mathsf{f}(x)\frac{e^{\alpha h}-1}{h}.$$
Chama-se derivada da função f no ponto x ao limite da taxa $[\mathsf{f}(x+h)-\mathsf{f}(x)]/h$ quando h tende para zero. Este número, cujo significado é o de taxa instantânea de crescimento de f no ponto x, é representado por $\mathsf{f}'(x)$. Geometricamente, a derivada $\mathsf{f}'(x)$ é a inclinação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto x. Sair pela tangente!

Então, conforme já mencionado, vamos discutir apenas a derivada da função exponencial, isto é, vamos mostrar que a derivada da função $\mathsf{f}(x) = b\,e^{\alpha x}$ é igual a $\alpha\cdot\mathsf{f}(x)$. Começamos por mostrar o seguinte resultado
$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1.$$

[1] Dados $a,b \in \mathbb{R}_+$ o conjunto H_a^b dos pontos (x,y) do plano tais que x está entre a e b e $0 \le y < 1/x$, chama-se uma faixa da hipérbole.

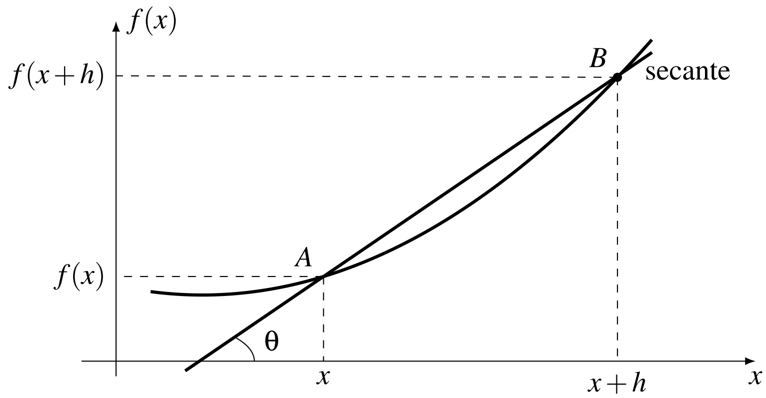


Figura 6.11: Esboço da reta secante, s.

Para ver isto, lembramos que a faixa de hipérbole $H_1^{e^h}$, conforme Figura 6.12, tem área igual a h. Esta faixa está compreendida entre um retângulo de área $(e^h-1)/e^h$ e outro de área e^h-1.

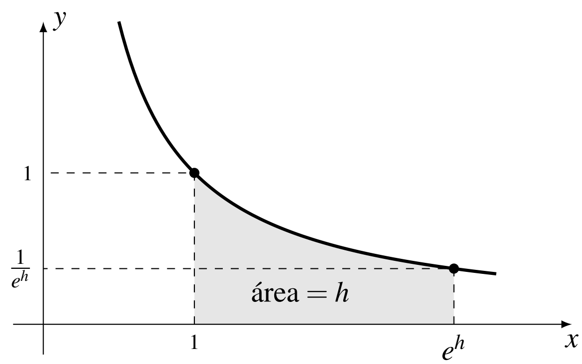


Figura 6.12: Faixa de uma hipérbole.

Portanto, temos a dupla desigualdade

$$\frac{e^h-1}{e^h} < h < e^h - 1.$$

Admitamos que h tende a zero por valores positivos. Dividindo as duas desigualdades por e^h-1, obtemos

$$\frac{1}{e^h} < \frac{h}{e^h-1} < 1 \qquad\qquad h > 0.$$

Quando $h \to 0$, a potência de h tende a 1, logo

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1.$$

Em completa analogia, podemos escrever,

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \cdot \frac{e^h-1}{h} = e^x.$$

Em geral, a fim de mostrar o resultado desejado, temos

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{\alpha(x+h)}-e^{x}}{h}=e^{\alpha x}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{e^{\alpha h}-1}{h}=\alpha\cdot e^{\alpha x}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{e^{\alpha h}-1}{\alpha h}\cdot$$

Escrevendo $k=\alpha h$, vemos que $h\to 0\Longleftrightarrow k\to 0$. Portanto,

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{\alpha(x+h)}-e^{\alpha x}}{h}=\alpha\cdot e^{\alpha x}\cdot\lim_{k\to 0}\frac{e^{k}-1}{\alpha k}=\alpha\cdot e^{\alpha x},$$

que é o resultado desejado. Então, a derivada da função $\mathsf{f}(x)=e^{\alpha x}$ é $\mathsf{f}'(x)=\alpha\cdot\mathsf{f}(x)$, logo a derivada é proporcional ao valor de $\mathsf{f}(x)$ da função f, sendo α o fator de proporcionalidade.

EXEMPLO 6.23. ÁREA DA SUPERFÍCIE DE UMA ESFERA

Com o procedimento anterior, vamos mostrar que a área da superfície de uma esfera é igual a $4\pi r^2$ onde r é o raio da esfera. Este é um resultado conhecido desde o EF.

Começamos pensando em duas esferas concêntricas, uma com raio r e a outra com raio $r+\varepsilon$ com $\varepsilon>0$. Então, vamos calcular o volume das esferas e subtrair o volume da de maior raio daquela de menor raio. Logo, a taxa de crescimento do volume, uma função V, da esfera de raio r e aquela de raio $r+\varepsilon$ é, por definição, o quociente

$$\frac{\mathsf{V}(r+\varepsilon)-\mathsf{V}(r)}{\varepsilon}.$$

Sabendo que o volume da esfera é $4\pi r^3/3$ onde r é o raio da esfera e utilizando a expressão anterior, já fatorando o termo comum, podemos escrever

$$\frac{\mathsf{V}(r+\varepsilon)-\mathsf{V}(r)}{\varepsilon}=\frac{4\pi}{3\varepsilon}\left[(r+\varepsilon)^3-r^3\right]=\frac{4\pi}{3}(3r^2+3r\varepsilon+\varepsilon^2).$$

Agora, seguindo o procedimento do anterior, basta tomar o limite de $\varepsilon\to 0$, logo

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathsf{V}(r+\varepsilon)-\mathsf{V}(r)}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{4\pi}{3}(3r^2+3r\varepsilon+\varepsilon^2)$$

de onde podemos escrever para a área da superfície esférica, denotada por $\mathsf{A}(r)$,

$$\mathsf{A}(r)=4\pi r^2$$

que é o resultado desejado.

6.6 Funções trigonométricas

A trigonometria teve início quando foi necessário relacionar o comprimento da corda de uma circunferência com o ângulo central por ela subentendido. Se c é o comprimento da corda, α é o ângulo e r o raio da circunferência, então $\mathsf{c}=2r\,\mathrm{sen}\,(\alpha/2)$. Como vamos ver a seguir, o cosseno de um ângulo agudo é igual ao seno do seu complemento, emerge a palavra cosseno querendo dizer seno do complemento. As demais funções trigonométricas, tangente, cotangente, secante e cossecante são definidas a partir de seno e cosseno. Ainda mais, lembremos que os conceitos envolvendo as linhas trigonométricas já foram introduzidos no Capítulo 3.

Definição 6.6.1. Funções seno e cosseno

As funções $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, chamadas funções cosseno e seno, respectivamente, são definidas de tal modo que para cada $t \in \mathbb{R}$ temos

$$\mathsf{E}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$$

isto é, $x = \cos t$ e $y = \operatorname{sen} t$ são, respectivamente, a abscissa e a ordenada do ponto $\mathsf{E}(t)$ da circunferência unitária.

Visto que as funções trigonométricas seno e cosseno são periódicas vamos recuperar os conceitos de periodicidade e paridade.

Definição 6.6.2. Função periódica

Uma função $\mathsf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é periódica quando existe um número $T \neq 0$ tal que $\mathsf{f}(t + T) = \mathsf{f}(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Se isto ocorre, então $\mathsf{f}(t + kT) = \mathsf{f}(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $k \in \mathbb{Z}$. O menor número $T > 0$ tal que $\mathsf{f}(t + T) = \mathsf{f}(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ chama-se período da função f.

Definição 6.6.3. Paridade

Uma função $\mathsf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é par quando $\mathsf{f}(-t) = \mathsf{f}(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Se $\mathsf{f}(-t) = -\mathsf{f}(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$ a função é chamada ímpar.

Exemplo 6.24. Circunferência unitária

Utilizando a circunferência unitária, vamos verificar as relações

$$\text{a)} \quad \cos(-t) = \cos t \qquad \text{e} \qquad \text{b)} \quad \operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Disto segue que, cosseno é uma função par enquanto seno é uma função ímpar. Ver Figura 6.13.

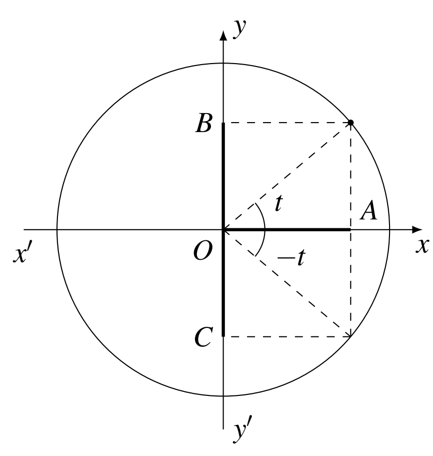


Figura 6.13: Paridade das funções seno e cosseno.

EXEMPLO 6.25. GRÁFICO DE $y = \operatorname{sen} x$ E $y = \cos x$.

Utilizando a paridade e a periodicidade, esboçar um gráfico das funções seno e cosseno, no intervalo $(0, 2\pi)$. Ver Figura 6.14.

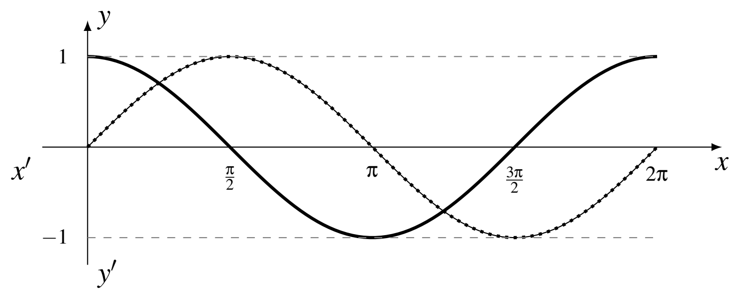


Figura 6.14: Gráfico das funções seno (linha pontilhada) e cosseno (linha cheia).

Das funções seno e cosseno derivam outras, conforme expressões a seguir, denominadas[2] tangente (denotada por tan), cotangente (denotada por cot), secante (denotada por sec) e cossecante (denotada por csc).

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

Note que todas estão definidas por um quociente logo o respectivo domínio restringe-se à exclusão dos zeros do respectivo denominador.

EXEMPLO 6.26. FUNÇÃO TANGENTE

Qual é o domínio da função tangente?

Esta função tem como domínio o conjunto dos números reais que não são múltiplos ímpares de $\pi/2$ pois $\cos x = 0$ se, e somente se, $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ com $k \in \mathbb{Z}$. Assim, o domínio da função $x \mapsto \tan x$ é formado pela união dos intervalos abertos $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$ para todo $k \in \mathbb{R}$. Em cada um desses intervalos [por exemplo, $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$] a função tangente é crescente e, na realidade $x \mapsto \tan x$ é uma correspondência biunívoca entre um intervalo aberto de comprimento π e a reta $\mathbb{R}$.

A função tangente, ainda que não esteja definida para todo número real $\mathbb{R}$, pode ser considerada periódica, de período π, pois π é o menor número real positivo tal que $\tan(x+\pi) = \tan x$ para todo x no domínio da função.

A restrição da função tangente ao intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ sendo uma correspondência biunívoca

$$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$$

possui uma função inversa, chamada arcotangente, indicada com a notação

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

a qual é uma correspondência biunívoca de domínio $\mathbb{R}$ e imagem igual ao intervalo aberto $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Um tratamento análogo à função tangente pode ser dado para as demais funções trigonométricas e são, para algumas delas, deixadas nos exercícios, ao final do capítulo.

[2] Alguns autores preferem denotar por: tg, cotan (cotg) e cossec, para tangente, cotangente e cossecante, respectivamente. Aqui, usamos a nomenclatura do L_AT_EX.

6.6.1 Aplicações

Passemos agora a discutir duas aplicações envolvendo as funções trigonométricas. Começamos discutimos como determinar as coordenadas de um ponto, por meio de uma rotação em torno da origem, a partir de um outro ponto, bem como expressar o seno e o cosseno em termos da tangente do arco metade, isto é, exprimindo-os em termos de funções racionais da tangente do arco metade.

EXEMPLO 6.27. ROTAÇÃO EM TORNO DA ORIGEM

Vamos mostrar como determinar as coordenadas de um ponto $A' = (x', y')$, obtido do ponto $A = (x, y)$, por meio de uma rotação de ângulo θ em torno da origem de $\mathbb{R}^2$. Ver Figura 6.15.

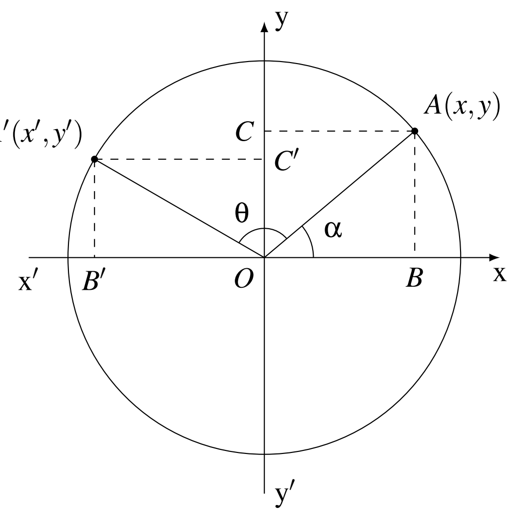


Figura 6.15: Rotação em torno da origem de um ângulo θ.

Chamemos de α o ângulo formado pelo eixo Ox com o segmento OA e escrevamos $r = \overline{OA}$. Então $r = \overline{OA'}$ de onde segue

$$x = r\cdot\cos\alpha, \quad y = r\cdot\operatorname{sen}\alpha, \quad x' = r\cdot\cos(\alpha+\theta), \quad y' = r\cdot\operatorname{sen}(\alpha+\theta).$$

Utilizando as expressões envolvendo soma de arcos, isto é, as fórmulas de adição obtemos

$$\begin{aligned} x' &= r\cos\alpha\cdot\cos\theta - r\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\theta &= x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta \\ y' &= r\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\theta + r\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\theta &= x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \end{aligned}$$

Portanto, a rotação de ângulo θ em torno da origem é a função (transformação) $\mathsf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\mathsf{T}(x,y) = (x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta, x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta).$$

EXEMPLO 6.28. SENO E COSSENO EM TERMOS DE $t = \tan(\alpha/2)$

Aqui, mostramos que $\cos\alpha$ e $\operatorname{sen}\alpha$, assim como as demais funções trigonométricas, podem ser expressas como funções racionais de $t = \tan(\alpha/2)$, fato este ligado à parametrização racional da circunferência unitária, $\mathcal{C}$.

Sendo $x \in \mathbb{R}$ podemos escrever a seguinte identidade

$$\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2 + \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2 = 1.$$

Desta igualdade podemos concluir que os números dentro dos parênteses podem representar a abscissa e a ordenada de um ponto da circunferência unitária $\mathcal{C}$, isto é, são o cosseno e o seno de um ângulo β. Ainda mais, todo número real x é a tangente de um (único) ângulo $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Logo, a igualdade acima significa que, para cada um desses valores de α deve existir um β tal que

$$\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \cos\beta \qquad \text{e} \qquad \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \operatorname{sen}\beta.$$

Utilizando o resultado anterior podemos escrever

$$\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$$

onde $t = \tan(\alpha/2)$, isto é, são funções racionais de t. A correspondência

$$x \mapsto \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}, \frac{2x}{1+x^2}\right)$$

é uma parametrização racional de $\mathcal{C}$. Para todo $x \in \mathbb{Q}$, o ponto que lhe corresponde tem ambas as coordenadas racionais.

6.7 Funções hiperbólicas

Aqui, nesta seção, propomos acenar para as chamadas funções hiperbólicas no sentido de que, a partir delas, podemos relacioná-las com a trigonometria (Capítulo 3), com os números complexos (Capítulo 4), calcular possíveis limites (Capítulo 7), derivadas (Capítulo 8), integrais (Capítulo 9), bem como com os logaritmos neperianos e as exponenciais (Capítulo 2).

Em analogia às funções trigonométricas, vamos introduzir as funções hiperbólicas, em termos das exponenciais, que desempenham papel importante, em particular, dentre outras, no cálculo de algumas integrais.

DEFINIÇÃO 6.7.1. SENO E COSSENO HIPERBÓLICOS

Seja $x \in \mathbb{R}$. Definimos o seno hiperbólico, denotado por $\operatorname{senh} x$, e o cosseno hiperbólico, denotado por $\cosh x$, através das expressões, respectivamente

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{e} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\cdot$$

Note que, essas duas definições não são independentes, pois, assim como na trigonometria, existe uma relação entre elas, a saber
$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1\cdot$$
Aqui, vamos nos restringir apenas a essas duas funções hiperbólicas, porém mencionamos que, em analogia às funções trigonométricas, podemos definir as funções tangente, cotangente, secante e cossecante, hiperbólicas. As relações são muito similares aquelas que encontramos na trigonometria. Algumas delas, usufruindo dessa estreita relação, serão abordadas nos exercícios.

O nome hiperbólica está associado à hipérbole como vamos verificar a seguir. Considere uma curva com equação escrita na forma paramétrica
$$y = a\cosh u \qquad \text{e} \qquad x = a\operatorname{senh} u$$
sendo $a \in \mathbb{R}^*$ uma constante e u um parâmetro real. Da expressão que relaciona as funções seno e cosseno hiperbólicos podemos escrever
$$y^2 - x^2 = a^2(\cosh^2 u - \operatorname{senh}^2 u) = a^2$$
que representa a equação de uma hipérbole equilátera. Logo, as funções $\operatorname{senh} u$ e $\cosh u$ representam a parametrização de uma hipérbole, daí o nome funções hiperbólicas.

Note a analogia com as equações paramétricas da circunferência $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$ que, a partir da relação fundamental da trigonometria permite escrever $x^2 + y^2 = r^2$ que representa a equação de uma circunferência centrada na origem do sistema de coordenadas e de raio r.

Concluímos que as funções hiperbólicas estão para a hipérbole equilátera, assim como as funções trigonométricas estão para a circunferência.

6.8 Funções trigonométricas e hiperbólicas

Como já mencionamos, existe uma estreita relação entre as funções trigonométricas e as funções hiperbólicas. Essa relação requer o conhecimento dos números complexos, conforme Capítulo 4, bem como a definição das funções hiperbólicas. Então, sendo $i = \sqrt{-1}$ a unidade imaginária, consideramos o expoente da função exponencial um número $z = x + iy$, isto é, $z \in \mathbb{C}$. Da definição podemos escrever
$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\operatorname{sen} y)$$
que, para $x = 0$, isto é, para um imaginário puro, fornece
$$e^{iy} = \cos y + i\operatorname{sen} y$$
bem como, trocando $y \to -y$ e usando a paridade das funções trigonométricas,
$$e^{-iy} = \cos y - i\operatorname{sen} y\cdot$$
A partir das duas expressões anteriores, explicitando as funções seno e cosseno trigonométricos, em função das exponenciais complexas, obtemos
$$\operatorname{sen} y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \qquad \text{e} \qquad \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}\cdot$$
o que é interpretado como, funções de uma variável real, seno e cosseno trigonométricos, expressos em termos das funções exponenciais com expoentes imaginários puros. Essas expressões sugerem que podemos explicitar o seno e o cosseno trigonométricos de uma variável complexa em termos dessa variável complexa.

EXEMPLO 6.29. 1718 – MARIA GAETANA AGNESI – 1799

Em comemoração aos trezentos anos do nascimento de Maria Gaetana Agnesi, a primeira mulher a ter um livro de matemática publicado, vamos apresentar a construção da curva que leva o seu nome, curva de Agnesi, também conhecida como *versiera* ou ainda, devido a uma tradução para o inglês, que ao que tudo indica, não fiel, bruxa de Agnesi.

Começamos pela descrição da curva. Sejam uma circunferência centrada em $C(0,a/2)$ e raio $r = a/2$; uma reta, denotada por t, paralela ao eixo horizontal, tangente à circunferência no ponto $D(0,a)$ e um feixe de retas, passando pela origem dos eixos $O(0,0)$, secante à circunferência e cortando a reta t, no ponto $T(x_T, y_T)$, conforme a Figura 6.16.

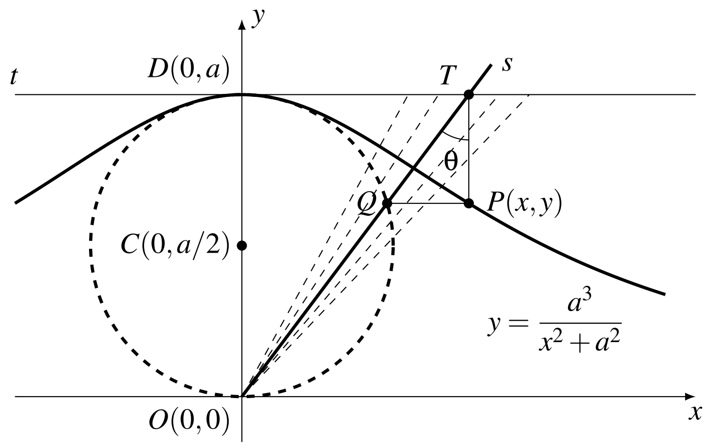


Figura 6.16: Curva de Agnesi.

A curva de Agnesi é o lugar geométrico dos pontos $P(x,y)$ que têm abscissa do ponto $T(x_T, y_T)$, interseção de uma reta, denotada por s, (genérica do feixe) com a reta tangente à circunferência e ordenada do ponto $Q(x_Q, y_Q)$, interseção dessa mesma reta do feixe com a circunferência.

Passemos a determinar a abscissa do ponto T e a ordenada do ponto Q. Primeiramente, a abscissa do ponto T. A equação da reta t é dada por $y = a$, enquanto a reta s tem equação $y = mx$ com m o coeficiente angular dessa reta. O ponto T é solução do sistema

$$\begin{cases} y &= a \\ y &= mx \end{cases}$$

de onde podemos escrever $T\left(\dfrac{a}{m}, a\right)$, então a abscissa é $x_T = a/m$. Por outro lado, as coordenadas do ponto Q satisfazem o seguinte sistema

$$\begin{cases} y &= mx \\ (a/2)^2 &= x^2 + (y - a/2)^2 \end{cases}$$

isto é, interseção da reta r com a circunferência. Resolvendo o sistema temos $Q\left(\dfrac{am}{1+m^2}, \dfrac{am^2}{1+m^2}\right)$, de onde segue a ordenada $y_Q = \dfrac{am^2}{1+m^2}$. Então, as coordenadas do ponto P são tais que

$$P\left(\frac{a}{m}, \frac{am^2}{1+m^2}\right).$$

Assim, a equação da curva de Agnesi, escrita na forma paramétrica, é

$$x = \frac{a}{m} \qquad \text{e} \qquad y = \frac{am^2}{1+m^2}$$

onde m é um parâmetro. A fim de escrever a equação da curva em termos das coordenadas, devemos eliminar o parâmetro m, de onde segue, a equação da curva em coordenadas cartesianas

$$y = \frac{a^3}{x^2+a^2}.$$

Enfim, uma outra maneira de parametrizar essa curva é introduzindo o ângulo θ, ângulo formado pela reta s e o eixo vertical, de onde podemos escrever

$$\begin{cases} x &= a\tan\theta \\ y &= a\cos^2\theta \end{cases}$$

bem como, na seguinte forma

$$\begin{cases} x &= a\cot\beta \\ y &= a\,\mathrm{sen}^2\,\beta \end{cases}$$

sendo, agora, β o ângulo formado pela reta s e o eixo horizontal. A área delimitada pela curva de Agnesi e a sua assíntota $y=0$ é igual a πa^2 unidades de área, isto é, π vezes o diâmetro da circunferência ao quadrado. Esse resultado será mostrado no Capítulo 9.

Diferentemente dos cinco capítulos anteriores onde os exercícios estavam direcionados para o conteúdo discutido, aqui, além de exercícios específicos sobre funções, apresentamos, também, exercícios relativos aos capítulos anteriores, uma particular forma de revisar o conteúdo já discutido.

6.9 Exercícios

1. Sejam $\mathsf{f}_1(x) = x+1$ e $\mathsf{f}_2(x) = \sqrt{x-1}$. Pede-se: a) O domínio de f_1 e f_2. b) O domínio de $\mathsf{f}_1 \diamond \mathsf{f}_2(x)$ onde $\diamond$ representa a adição, subtração, multiplicação e divisão, quando devidamente definidas.

2. Sejam as funções $\mathsf{f}(x) = \sqrt{x}$ e $\mathsf{g}(x) = x^2+1$. Encontre os domínios e obtenha as funções compostas $\mathsf{f}\circ\mathsf{g}$ e $\mathsf{g}\circ\mathsf{f}$.

3. (Unicamp-98) O preço a ser pago por uma corrida de táxi inclui uma parcela fixa, denominada bandeirada, e uma parcela que depende da distância percorrida. Se a bandeirada custa R\$3,44 e cada quilômetro rodado custa R\$0,86, calcule: a) o preço de uma corrida de 11 km; b) a distância percorrida por um passageiro que pagou R\$21,50 pela corrida.

4. Num estacionamento para automóveis, o preço por período (por exemplo, quatro horas) de estacionamento é R\$20,00. A esse preço estacionam 50 automóveis por dia. Se o preço cobrado for R\$15,00, estacionarão 75 automóveis. Admitindo que esta demanda possa ser representada por uma função afim, determine-a.

5. Sejam $x \in \mathbb{R}$ e as funções $\mathsf{f}_1(x) = x^2+1$ e $\mathsf{f}_2(x) = \sqrt{x-1}$. Pede-se calcular: a) $\mathsf{f}_1\circ\mathsf{f}_2$ e b) $\mathsf{f}_2\circ\mathsf{f}_1$, se definidas. Explicite os respectivos domínios.

6. Sejam $a \in \mathbb{R}^*$ e $m \in \mathbb{R}$. O gráfico da função quadrática $\mathsf{f}(x) = a(x-m)^2$ é uma parábola com foco em $F(m, 1/4a)$ e cuja diretriz é a reta $y = -1/4a$. É claro que podemos proceder como no EXEMPLO 6.19, isto é, a partir da definção de parábola. Aqui, é conveniente observar que o gráfico de $\mathsf{f}(x) = a(x-m)^2$ pode ser obtido do gráfico $\mathsf{g}(x) = ax^2$ por uma translação horizontal $(x,y) \mapsto (x+m,y)$ que leva o eixo $x = 0$ no eixo $x = m$. Esboçar o gráfico da função $\mathsf{f}(x) = a(x-m)^2$.

7. Sejam $a,m,k \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$. O gráfico da função quadrática $\mathsf{f}(x) = a(x-m)^2 + k$ é a parábola cujo foco é o ponto $F(m, k+1/4a)$ e cuja diretriz é a reta $y = k - 1/4a$. Conclusão análoga ao anterior acrescida de uma translação vertical $(x,y) \mapsto (x, y+k)$ ou ainda a partir de uma translação horizontal e uma outra vertical, a partir do EXEMPLO 6.19, isto é, $(x,y) \mapsto (x+m, y+k)$. Esboçar o gráfico da função $\mathsf{f}(x) = a(x-m)^2 + k$.

8. Seja $y = ax^2 + bx + c$ com $a \in \mathbb{R}^*$ e $b, c \in \mathbb{R}$. Submete-se esta parábola à translação horizontal $(x,y) \mapsto (x+m,y)$ onde m é a soma das raízes da correspondente equação, de modo a obter uma nova parábola, cujo vértice tem abscissa igual a zero, isto é, está sobre o eixo Oy, mostre que

$$\mathsf{g}(x) = \mathsf{f}(x-m) = ax^2 + k$$

onde $k = -\Delta/4a$.

9. Utilizando os dados do exercício anterior, efetue uma translação vertical, isto é, $(x,y) \mapsto (x, y-k)$ de modo a obter uma nova parábola cujo vértice coincide com a origem, isto é, mostre que

$$\mathsf{h}(x) = \mathsf{g}(x) - k = ax^2.$$

Dos dois exercícios anteriores concluímos: *A parábola, gráfico da função* $\mathsf{f}(x) = ax^2 + bx + c$ *é levada na parábola, gráfico da função*, $\mathsf{h}(x) = ax^2$ *mediante uma translação horizontal seguida de uma translação vertical*. Estas duas parábolas são chamadas congruentes.

10. Mostre que a reflexão em torno do eixo horizontal, isto é, a transformação $(x,y) \mapsto (x,-y)$ leva o gráfico de $\mathsf{f}(x) = -ax^2$ no gráfico de $\mathsf{g}(x) = ax^2$.

11. Seja $x \in \mathbb{R}$. Considere as equações

$$\text{a)}\quad x^2 + 5x + 10 = 0 \qquad \text{e} \qquad \text{b)}\quad 3x^2 + x - 10 = 0.$$

(a) Escreva a soma e o produto das raízes e (b) Completando o quadrado, determine as raízes reais.

12. Dada a função $\mathsf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $\mathsf{f}(x) = x^2/8 - x/2 - 3/2$ pede-se: a) Conjunto imagem; b) Esboçar um gráfico de $\mathsf{f}(x) \times x$; c) Coordenadas do foco e d) Equação da reta diretriz.

13. Seja $\mathsf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $\mathsf{f}(x) = 3x^2 + x - 10$. Mostre que $\mathsf{g}(x) = \mathsf{f}(x+h) - \mathsf{f}(x)$ é uma função afim.

14. Seja $\mathsf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $\mathsf{f}(x) = 3x^2 - 16$. Escreva a equação da reta tangente passando pelo ponto $P(2,-4)$ bem como aquela passando pelo ponto $Q(-2,-4)$.

15. Com os dados do exercício anterior, esboce, num mesmo sistema de eixos, um gráfico da parábola e das duas tangentes. Determine o ângulo formado por estas duas tangentes.

16. Dê o conjunto solução para as inequações

$$\text{a)} \quad \frac{x^2+5x+10}{x^2-x-6} \leq 0 \qquad \text{e} \qquad \text{b)} \quad (3x^2+x-10)(-x^2+5x-4) \geq 0.$$

17. Com L metros de cerca um fazendeiro deseja circundar um galpão retangular junto a um muro a fim de confinar animais. Quais devem ser as medidas do retângulo para que a área cercada seja a maior possível?

18. Sejam x e y reais tais que $2x+3y=12$. Determine o valor mínimo de $z=x^2+9y^2$.

19. Seja $n \in \mathbb{N}$. Qual é o máximo valor de $-n^2+17n$?

20. Seja $\mathsf{f}(x)=x^n$ com $n \in \mathbb{Z}$. Define-se a derivada (derivada de ordem um) de $\mathsf{f}(x)$, denotada por $\mathsf{f}'(x)=nx^{n-1}$. a) Considere o polinômio $\mathsf{p}(x)=ax^2+bx+c$ com $a,b,c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Mostre que se $\mathsf{p}(x_0)=0$ então $\mathsf{p}'(x_0) \neq 0$. b) Analogamente para $\mathsf{p}(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ com $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Mostre que se $\mathsf{p}(x_0)=0$ e $\mathsf{p}'(x_0)=0$ então $\mathsf{p}''(x_0) \neq 0$ onde $\mathsf{p}''(x)$ é a derivada de ordem dois.

21. Esboçar o gráfico para

$$\text{a)} \quad \mathsf{f}(x) = -\frac{2}{x} \qquad \text{e} \qquad \text{b)} \quad \mathsf{f}(x) = \frac{1}{x-1}$$

apresentando os conjuntos domínio e imagem.

22. Análogo ao anterior para a função

$$\mathsf{f}(x) = \frac{x-3}{x-1}.$$

23. A cidade de Campinas tem hoje, aproximadamente, 1.000.000 de habitantes. Admita que esse número cresça a uma taxa de 2% ao ano. Pede-se: a) O número de habitantes daqui a um ano; b) Se daqui a 10 anos o número de habitantes for igual a 1.500.000, qual teria sido a taxa de crescimento; c) Qual deve ser a taxa para que a população duplique em 10 anos?

24. Uma particular peça de um equipamento sofre, com o uso, uma depreciação que pode ser caracterizada como tipo exponencial de tal forma que seu valor, daqui a t anos, seja dado por

$$D(t) = 200 \cdot 2^{-2t}.$$

a) Qual seu valor hoje, em reais?; b) Qual será a depreciação após 5 anos?; c) Esboce um gráfico de $D \times t$.

25. Um carro zero quilômetro deprecia 20% no primeiro ano; 18% no segundo ano, e 16% ao ano do terceiro ano em diante. a) Se uma pessoa comprou esse carro com 2 anos de uso pagando R\$10.000,00 qual seu valor quando era zero quilômetro; b) Nas condições do item anterior, qual o valor do carro daqui a t ($t \geq 2$) anos?

26. Um indivíduo começa a trabalhar e resolve fazer, de imediato, uma poupança privada a fim de receber uma quantia complementar mensal após a aposentadoria. Para tal, todo mês, a partir do primeiro mês, deposita C_0 reais em uma aplicação que rende juros compostos de 0,4% ao

mês. Efetua 420 depósitos, correspondentes aos 35 anos de trabalho. Todo este esforço é para constituir uma poupança da qual possa sacar R$2.000,00 por mês durante 180 meses, sendo a primeira retirada um mês após o último depósito. a) Qual a poupança que ele deverá constituir logo após o último depósito? e b) Qual o valor do depósito mensal?

27. Seja $x \in \mathbb{R}$. Esboçar o gráfico para:

$$\text{a)}\quad \mathsf{f}_1(x) = 2^x, \qquad \text{b)}\quad \mathsf{f}_2(x) = 2^{-x}, \qquad \text{c)}\quad \mathsf{f}_3(x) = 3^x$$

28. Resolver as equações exponenciais

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & 2^{2x} - 3\cdot 2^x + 2 = 0 & \text{b)} & 9^x - 6\cdot 3^x + 5 = 0 \\ \text{c)} & 2^{2x+1} - 7\cdot 2^x + 3 = 0 & \text{d)} & 3^{x-1} = 7^{x-1} \end{array}$$

29. Resolver as inequações exponenciais

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & 2^{2x} > 1 & \text{b)} & 2^{-x} > 4 \\ \text{c)} & 3^{(2-x)(x+2)} \leq \frac{1}{27} & \text{d)} & \sqrt[x]{2} \geq (64)^x \end{array}$$

30. Esboçar, num mesmo sistema de eixos, o gráfico associado às duas funções $\mathsf{f}(x) = \log_2 x$ e $\mathsf{f}(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

31. Seja $x \in \mathbb{R}$. Determinar o conjunto solução para as seguintes desigualdades

$$\text{a)}\quad \log x > 2 - \log 2x \qquad \text{e} \qquad \text{b)}\quad \log_x(2x-1) > 2.$$

32. Considere $a > 1$. Esboçar num mesmo sistema de eixos o gráfico associado às funções $\mathsf{f}(x) = \log_a x$ e $\mathsf{f}(x) = a^x$.

33. Análogo ao anterior no caso em que $0 < a < 1$.

34. Mostre que $\mathsf{L} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ é sempre injetiva.

35. Mostre que $\mathsf{L}(1) = 0$.

36. Mostre que: Números maiores do que 1 têm logaritmos positivos e os números positivos menores do que 1 têm logaritmos negativos.

37. Mostre que para todo $x > 0$ tem-se $\mathsf{L}(1/x) = -\mathsf{L}(x)$.

38. Mostre que para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_+$ vale

$$\mathsf{L}(x/y) = \mathsf{L}(x) - \mathsf{L}(y).$$

39. Dadas as funções $\mathsf{L}, \mathsf{M} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, existe uma constante $c > 0$ tal que $\mathsf{M}(x) = c\,\mathsf{L}(x)$ para todo $x > 0$ [12]. Admita as condições de validade da definição dos logaritmos para mostrar que

$$\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x$$

conhecida como a expressão de mudança de base. Esta relação assegura que duas funções logarítmicas quaisquer diferem apenas por um fator constante.

40. Utilize o gráfico da hipérbole equilátera a fim de verificar a dupla desigualdade

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

41. Utilizando a circunferência trigonométrica, verifique a identidade (relação fundamental da trigonometria) $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$.

42. Análogo ao EXEMPLO 6.25 no intervalo $(-\pi, \pi)$.

43. Esboçar os gráficos para

$$\text{a)}\quad y = \tan x \qquad \text{e} \qquad \text{b)}\quad y = \arctan x$$

44. Seja $y = ax + b$ a equação de uma reta não vertical. Mostre que $a = \tan\alpha$ onde α é o ângulo que o semieixo positivo $\overrightarrow{Ox}$ forma com esta reta.

45. Mostre as relações

$$\text{a)}\quad \sec^2 x = 1 + \tan^2 x \qquad \text{e} \qquad \text{b)}\quad \csc^2 x = 1 + \cot^2 x$$

46. Esboçar um gráfico, no intervalo aberto $(0, 2\pi)$, para as funções

$$\text{a)}\quad y = \cot x, \qquad \text{b)}\quad y = \sec x, \qquad \text{c)}\quad y = \csc x$$

explicitando os respectivos conjuntos domínio e imagem.

Os exercícios a seguir foram, com algumas modificações, retirados da referência [6].

47. Sabendo que $\tan\alpha = 3$ e $0 < \alpha < \pi/2$, calcule: a) $\operatorname{sen}\alpha$ e b) $\cos\alpha$.

48. Um triângulo retângulo tem hipotenusa 1 e perímetro $1 + \sqrt{6}/2$. Qual é a medida do menor de seus ângulos?

49. Sabendo que

$$\begin{aligned} a \sec x &= 1 + \tan x \\ b \sec x &= 1 - \tan x \end{aligned}$$

encontre uma relação entre a e b.

50. Mostre que $\operatorname{sen}(A+B) = \operatorname{sen} A \cos B + \operatorname{sen} B \cos A$.

51. Calcule a) $\operatorname{sen} 3\pi/4$ e b) $\cos\pi/12$.

52. Mostre que $\tan 40° + \tan 20° = 4\sqrt{3}\operatorname{sen} 10°$

53. Resolva a equação $\sqrt{3}\operatorname{sen} x = 1 + \cos x$.

54. Para determinar a distância entre dois pontos A e B situados além de um rio, marcaram-se dois pontos C e D aquém do rio e mediram-se os ângulos $A\widehat{C}B = 35°$, $B\widehat{C}D = 20°$, $A\widehat{D}C = 18°$, $A\widehat{D}B = 41°$ e a distância $\overline{CD} = 320$ metros. Calcular a distância $\overline{AB}$.

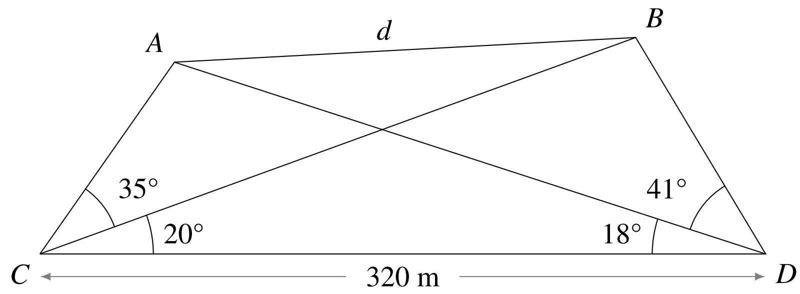


Figura 6.17: Figura relativa ao Exercício 54.

55. Resolva a inequação $\cos x + \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,x \leq 1$.

56. Considere a função
$$y = -3\,\mathrm{sen}\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right] + 1.$$
Esboçar o gráfico desta função a partir dos gráficos da sequência abaixo.

a) $y = \mathrm{sen}\,2x$ que possui período π.

b) Translação horizontal de $\pi/6$
$$y = \mathrm{sen}\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

c) Dilatação vertical
$$y = 3\,\mathrm{sen}\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

d) Simetria em relação ao eixo horizontal x
$$y = -3\,\mathrm{sen}\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

e) Translação vertical
$$y = -3\,\mathrm{sen}\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right] + 1.$$

57. A partir do EXEMPLO 6.28 e das fórmula do arco duplo, mostre que $\beta = 2\alpha$.

58. A partir do EXEMPLO 6.28, expresse $\sec\alpha$ e $\csc\alpha$ em termos de $t = \tan(\alpha/2)$.

59. Mostre que: A área de um triângulo qualquer é igual ao semiproduto de dois lados multiplicado pelo seno do ângulo por eles formado.

60. Calcule a área de um triângulo cujo ângulo formado por dois lados de 10 cm e 12 cm é igual a $\pi/12$ rad.

61. Mostre que: A medida do ângulo inscrito é igual à metade da medida do correspondente ângulo central.

62. Mostre que, em todo triângulo retângulo, vale: o produto da altura pela hipotenusa é igual ao produto dos catetos.

63. Mostre que a área de um triângulo, denotada por A, de lados a,b,c pode ser escrita na forma, conhecida pelo nome de fórmula de Heron

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

onde p é o semiperímetro.

64. (Translação horizontal.) Seja $x \in \mathbb{R}$. Esboce, no mesmo sistema de eixos, o gráfico para as funções $y_-(x) = (x+1)^2$, $y(x) = x^2$ e $y_+(x) = (x-1)^2$.

65. (Deslocamento vertical.) Seja $x \in \mathbb{R}$. Esboce, num mesmo sistema de eixos, o gráfico para as funções $y^-(x) = x^2 - 1$, $y(x) = x^2$ e $y^+(x) = x^2 + 1$.

66. Explicitar as frações a seguir como soma de frações (parciais):

$$\text{a)}\quad \frac{1}{x(x^2+3x+2)} \qquad \text{e} \qquad \text{b)}\quad \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}$$

67. Explicitar as frações a seguir como soma de frações (parciais):

$$\text{a)}\quad \frac{x}{x^2+2x-3}, \qquad \text{b)}\quad \frac{x^2-x}{(x-1)(x+5)(x-3)}, \qquad \text{c)}\quad \frac{x^3}{x^2-1}.$$

68. Dados os conjuntos $A = \{1,2,3,4,5\}$ e $B = \{0,3,8,15,17,24,26\}$ e a função $f : A \to B$ definida por $f(x) = x^2 - 1$. Determine o domínio, o contradomínio e a imagem de f.

69. Explicitar as frações a seguir como soma de frações (parciais):

    (a) $\dfrac{4}{x(x-1)^2}$

    (b) $\dfrac{4x+1}{3x^2-4x+1}$

70. Dê o domínio para

$$\text{a)}\quad f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x-1} \qquad \text{e} \qquad \text{b)}\quad g(x) = \frac{|x-1|}{x-1}.$$

71. Considere a função $f(x) = |x-1| + |x-2|$. a) Mostre que

$$f(x) = \begin{cases} -2x+3 & \text{se} \quad x \le 1 \\ 1 & \text{se} \quad 1 < x < 2. \\ 2x-3 & \text{se} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

b) Esboce o gráfico de $f(x) \times x$.

72. (Unicamp/2015) Seja $a \in \mathbb{R}_+$ e considere as funções afins $f(x) = ax + 3a$ e $g(x) = 9 - 2x$, definidas para todo número real x. a) Encontre o número de soluções inteiras da inequação $f(x) \cdot g(x) > 0$ e b) Encontre o valor de a tal que $f(g(x)) = g(f(x))$ para todo real x.

73. (UFU/Adaptado) Sejam f e g funções reais de variável real definidas por $g(x) = \dfrac{x+4}{5}$ e $f(x) = \dfrac{x-5}{x}$, com $x \neq 0$. Determine a função $[f^{-1} \circ (g \circ f)](x)$.

74. Seja $\{x \in \mathbb{R} : x > -5/3\}$. Determine a inversa da função $y = 2\log_2(3x+5)$.

75. Seja $a \neq 1$ e positivo. Qual é o domínio da função $y(x) = \log_a(x^2 - 2x - 3)$?

76. Mostre que $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.

77. (ITA/1991-Adaptado) Sejam $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2}\cdot$$

Determine a função inversa de $f(x)$.

78. (ITA/2017-Adaptado) Sejam

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R} : y \geq ||x| - 1|\} \\ S_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R} : x^2 + (y+1)^2 \leq 25. \end{aligned}$$

Determine a área delimitada pela região $S_1 \cap S_2$.

79. Seja $x \in \mathbb{R}$. Mostre que

$$e^x = \cosh x + \operatorname{senh} x \qquad \text{e} \qquad e^{-x} = \cosh x - \operatorname{senh} x\cdot$$

80. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Mostre que

$$\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y\cdot$$

81. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Mostre que

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y\cdot$$

82. Utilizando os dois exercícios anteriores, mostre que

$$\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x \qquad \text{e} \qquad \cosh 2x = \cosh^2 + \operatorname{senh}^2 x\cdot$$

83. Mostre as relações entre as funções trigonométrica e hiperbólica

$$\text{a)} \quad \operatorname{senh} iz = i \operatorname{sen} z \qquad \text{e} \qquad \text{b)} \quad \cosh iz = \cos z\cdot$$

84. Mostre o resultado $\tanh iz = i \tan z$.

85. Sabendo que $\tanh x = \operatorname{senh} x / \cosh x$ e que $\tanh x = 3/5$, calcular: a) $\operatorname{senh} x$ e b) $\cosh x$.

6.9.1 Respostas e/ou sugestões

1. a) $\{x \in \mathbb{R}\}$ e $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$;
   b) Soma, subtração e produto $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$; divisão $\{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$.

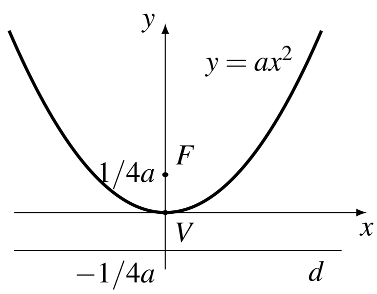
2. $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $\{x \in \mathbb{R}\}$, $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

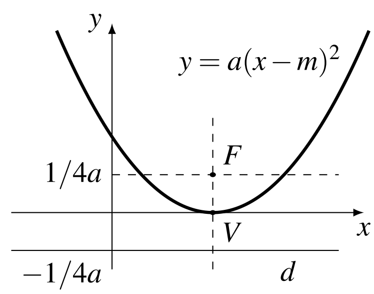
3. a) R$\$12,90$
   b) 21 quilômetros.

4. $y = -0,2x + 30$.

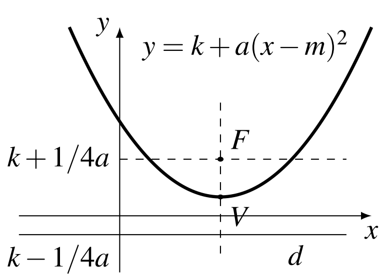
5. a) $f_1 \circ f_2 = x$
   b) $f_2 \circ f_1 = x$. Domínio $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$.

6. Translação horizontal





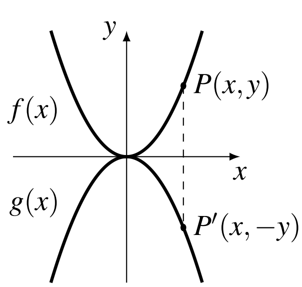
7. Translação vertical



8. Iguale os trinômios e obtenha k.

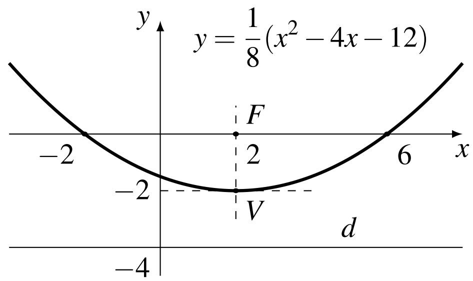
9. Análogo ao anterior com uma conveniente redefinição da função.

10. Reflexão em torno do eixo.



11. a) $S=-5$, $P=10$, $x=-\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{15}}{2}$
    b) $S=-1/3$, $P=-10/3$, $x=-\frac{1}{6}\pm\frac{11}{6}$.

12. a) $\{y\in\mathbb{R} : y\geq -2\}$
    b)

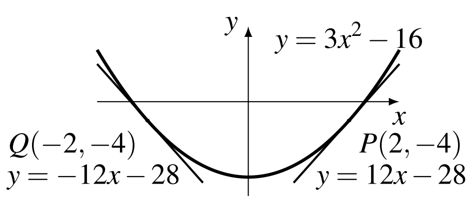


    c) $F(2,0)$
    d) $y_d=-4$.

13. Mostre que $g(x)=Ax+B$ onde $A=6h$ e $B=3h^2+h$.

14. $y_P=12x-28$ e $y_Q=-12x-28$.

15. Paralelas à parábola.



16. a) $\{x\in\mathbb{R} : -2<x<3\}$
    b) $\{x\in\mathbb{R} : -2\leq<x<1$ ou $5/3\leq x\leq 4\}$.

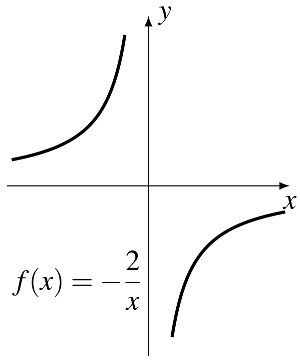
17. Basta determinar a abscissa do vértice. Largura $L/4$ e comprimento $L/2$.

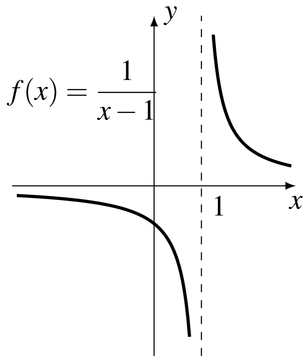
18. Basta determinar a ordenada do vértice $144/13$.

19. Note que a abscissa do vértice não é um inteiro. Tem dois valores tais que o máximo seja 72.

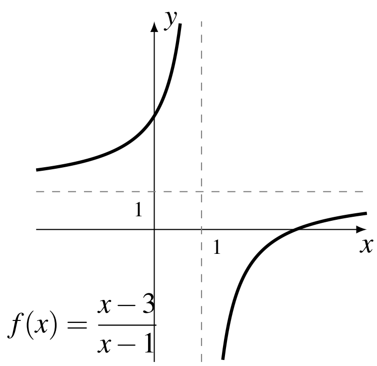
20. Direto da definição admitindo que a derivada é linear.

21. Assíntotas verticais.



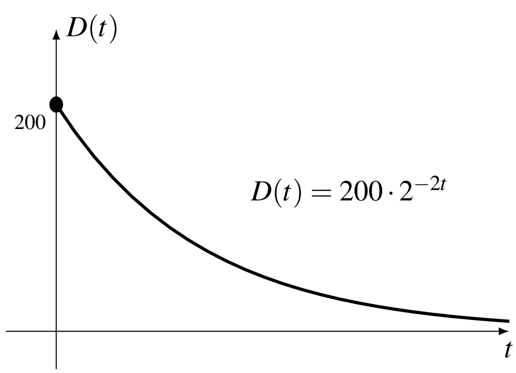


22. Assíntotas horizontal e vertical.



23. a) 1.020.000 habitantes.
    b) $4,1\%$ e c) $7,2\%$.

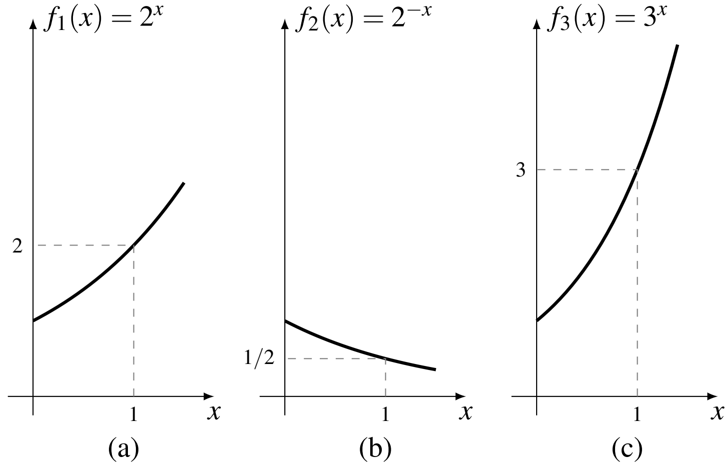
24. a) $D(0) =$R\$200,00
    b) $D(5) \simeq 0,195$
    c) Decaimento exponencial.



25. a) R\$$15.625,00$
    b) $D(t) = 15625(4/5)^t$.

26. a) R\$$360.000,00$
    b) aproximadamente R\$$270,00$.

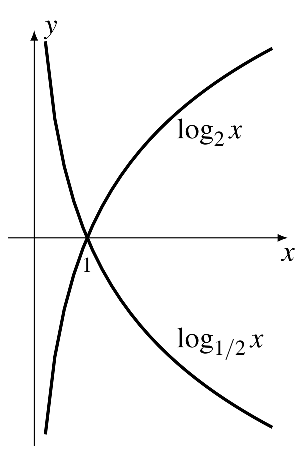
27. a) crescente, b) decrescente e c) crescente.



28. a) $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$
    b) $x_1 = 0$ e $x_2 = \log_3 5$
    c) $x_1 = -1$ e $x_2 = \log_2 3$
    d) $x = 1$.

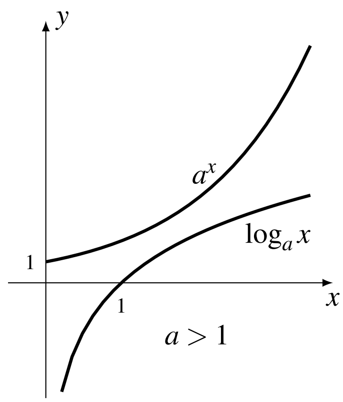
29. a) $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$
    b) $\{x \in \mathbb{R} : x < -2\}$
    c) $\{x \in \mathbb{R} : x \leq -\sqrt{7}$ ou $x \geq \sqrt{7}\}$
    d) $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq \sqrt{6}/6\}$.

30. Funções crescente, $a > 1$ e decrescente, $0 < a < 1$.

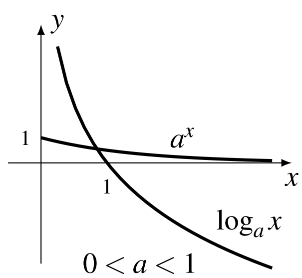


31. a) $\{x \in \mathbb{R} : x > 5\sqrt{2}\}$
    b) Conjunto vazio.

32. Funções crescente, $a > 1$ e decrescente, $0 < a < 1$.



33. Funções crescente, $a > 1$ e decrescente, $0 < a < 1$.



34. Direto da definição $x_1 \neq x_2$ implica $L(x_1) \neq L(x_2)$.

35. $L(1) = 0$.

36. Direto da definição.

37. Utilize o anterior rescrevendo $(1/x) \cdot x = 1$.

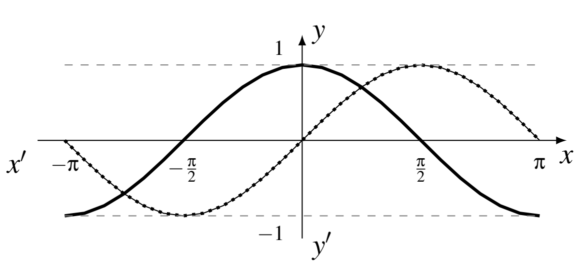
38. Direto da definição e potências de mesma base.

39. Utilize divisão de dois logaritmos como uma diferença.

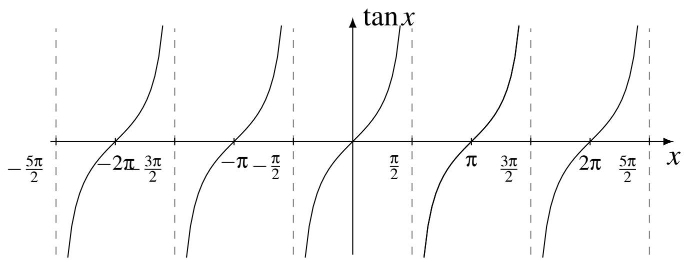
40. Compare a área de retângulos com área abaixo da curva.

41. Triângulo retângulo com hipotenusa unitária e os eixos dos senos e cossenos.

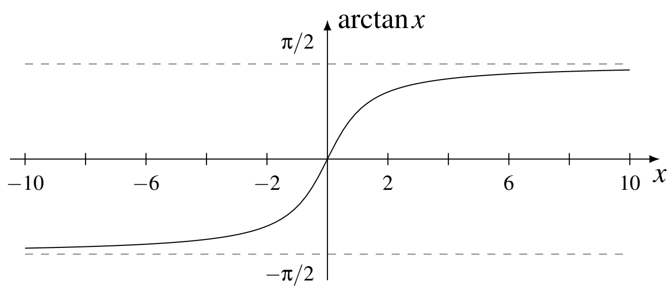
42. Senoide e cossenoide.



43. a) Tangentoide.



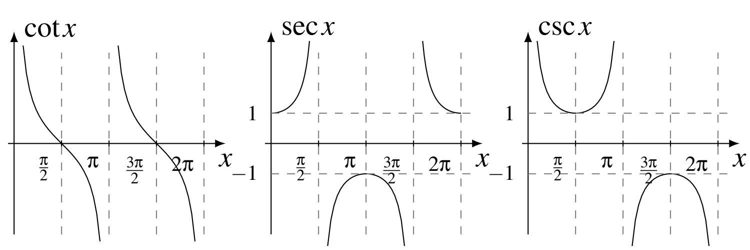
b) Arco tangente.



44. A tangente é igual ao quociente do seno pelo cosseno, desde que definida.

45. a) Use a relação $\tan x = \operatorname{sen} x / \cos x$ e a relação fundamental envolvendo seno e cosseno
b) Análogo ao item anterior e a relação $\cot x = \cos x / \operatorname{sen} x$.

46. a) Cotangentoide, b) Secantoide e c) Cossecantoide.



(a) (b) (c)

47. a) $\operatorname{sen} \alpha = 3\sqrt{10}/10$
b) $\cos \alpha = \sqrt{10}/10$.

48. $\pi/12$ rad.

49. $a^2 + b^2 = 2$.

50. Faça analogia com o TEOREMA 3.2.1.

51. a) $\sqrt{2}/2$
b) $\sqrt{2+\sqrt{3}}/2$.

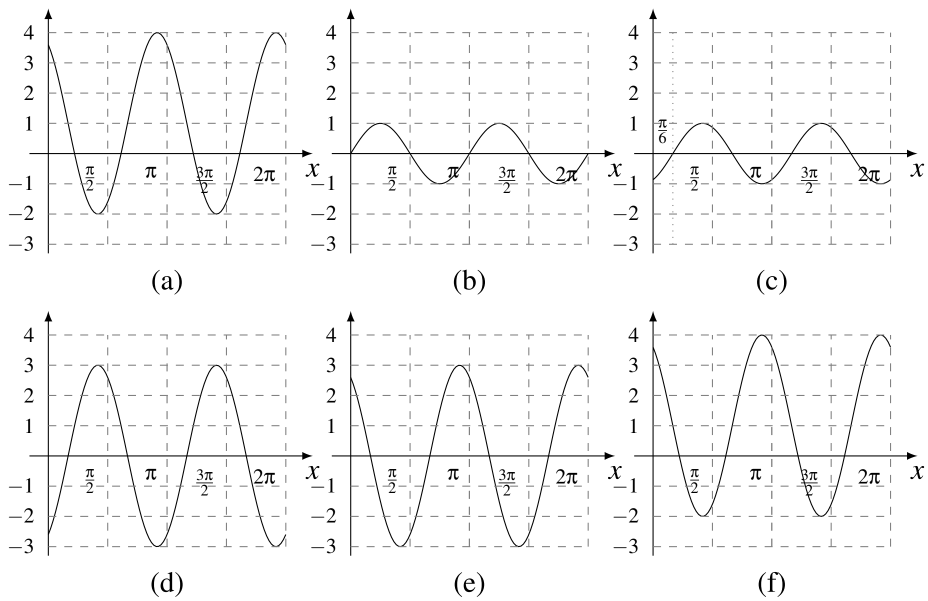
52. Utilize a relação $2\,\text{sen}\,10°(1+2\cos 20°) = 1$.

53. $\{x = k\pi,\ k = 1,2,3,\ldots\}$ ou $\{x = \pm\pi/3 + 2k\pi,\ k = 0,1,2,\ldots\}$.

54. Utilize as leis dos senos e dos cossenos para obter 204m.

55. $\{2\pi/3 + 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi,\}$ ou $\{5\pi/3 + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi,\}$ sendo $k = 0,1,2,\ldots$.

56. Translações envolvendo a função seno.



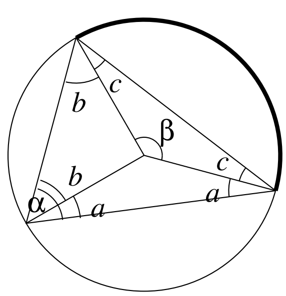
57. Divida a expressão para o seno de β em função da tangente de α pela expressão para o cosseno de β em função da tangente de α a fim de obter a expressão para a tangente do arco duplo. Conclua o resultado.

58. $\sec\alpha = (1+t^2)/(1-t^2)$ e $\csc\alpha = (1+t^2)/2t$.

59. Utilize a definição de seno para obter a área $A = \dfrac{ab}{2}\,\text{sen}\,\theta$ onde a, b são dois lados do triângulo que formam um ângulo θ.

60. $60\sqrt{2-\sqrt{3}}\ \text{cm}^2$.

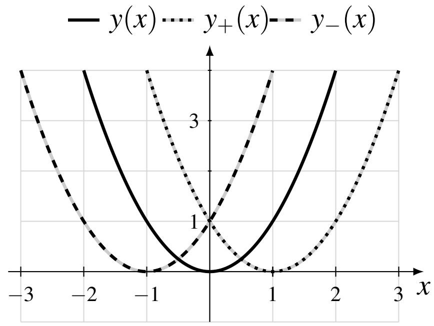
61. Considere a figura a seguir e utilize o fato de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é π rad a fim de mostrar que $\beta = 2\alpha$.



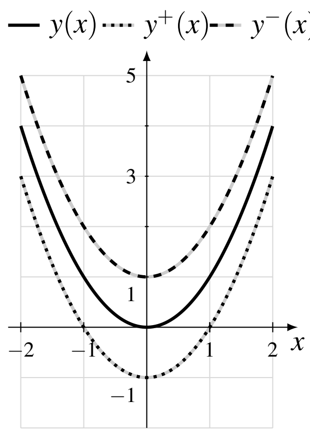
62. Escreva a área de duas maneiras distintas e iguale-as.

63. Utilize o teorema de Pitágoras e a expressão da área do triângulo lembrando que o perímetro é a soma dos lados.

64. Translações horizontais de parábolas.



65. Translações verticais de parábolas.



66. a) $\dfrac{1/2}{x} - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1/2}{x+2}$
    b) $\dfrac{1/3}{x^2+1} - \dfrac{1/3}{x^2+4}$.

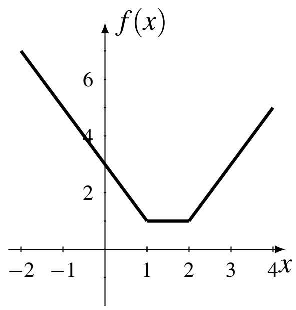
67. a) $\dfrac{3/4}{x+3}$
    b) $\dfrac{5/8}{x+5} + \dfrac{3}{x-3}$
    c) $x + \dfrac{1/2}{x-1} + \dfrac{1/2}{x+1}$.

68. Domínio: A; contradomínio: B; Imagem: $\{0, 3, 8, 15, 24\}$.

69. a) $\dfrac{4}{x} + \dfrac{4}{(x-1)^2} - \dfrac{4}{x-1}$
    b) $\dfrac{5/2}{x-1} - \dfrac{7/2}{x-1}$

70. a) $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$.

71. a) Utilize a definição de módulo.
b) Esboço gráfico.



72. a) $\{-2,-1,0,1,2,3,4\}$
b) $a = 1/2$.

73. $5x$.

74. $y^{-1}(x) = (-5+2^{x/2})/3$.

75. $\{x \in \mathbb{R} : x < -1 \text{ ou } x > 3\}$.

76. Chame $\arctan\frac{1}{2} = x$ e $\arctan\frac{1}{3} = y$ e utilize a expressão que fornece a tangente da soma.

77. $f^{-1}(x) = \log_a(x+\sqrt{x^2+1}$.

78. $(25\pi/4-2)$ unidades de área.

79. Direto da definição de seno e cosseno hiperbólicos.

80. Direto da definição do seno hiperbólico escrevendo $x \to x+y$.

81. Direto da definição do cosseno hiperbólico escrevendo $x \to x+y$.

82. Considere $x = y$ nas duas expressões para o seno e o cosseno hiperbólicos da soma.

83. Direto da definição.

84. Utilize o resultado do Exercício 83.

85. a) $3/4$, b) $5/4$.

Capítulo 7

Limites

Inscreva um polígono regular de n lados num círculo de raio unitário, sendo $p(n)$ o perímetro e $A(n)$ a área. Certifique-se que quanto maior for o número de lados o quociente $p(n)/A(n)$ se aproxima de 2. Mostre que o limite para $n \to \infty$ é 2. Quanto deveria ser o raio a fim de que o limite resultasse unitário?

Aqui, após uma breve resivão de conhecimentos, em particular, relativos às sequências, dentre eles o conceito de monotonia e o critério de Cauchy, que se farão necessários para os demais capítulos, pois este capítulo é pré requisito para os próximos dois, apresentamos o conceito de limite. Esse conceito desempenha papel importante uma vez que os conceitos de derivada e de integral serão introduzidos aravés de um particular limite. Ainda mais, pelo mesmo argumento, isto é, a necessidade na abordagem de outros exercícios visando simplificações, vamos dedicar uma seção ao que atende pelo nome de frações parciais, assunto já mencionado no Capítulo 6.

7.1 Preliminares

Nesta seção, vamos recuperar algumas definições e teoremas que já foram discutidos no Capítulo 1 e que se fazem necessárias para o bom andamento deste capítulo, visando a formalização do conceito de limite.

DEFINIÇÃO 7.1.1. CONJUNTOS LIMITADOS

Sejam $a,b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Esses dois números determinam três tipos de intervalos, a saber: Aberto, denotado por (a,b) ou ainda $a < x < b$, com $x \in \mathbb{R}$; Fechado, denotado por $[a,b]$ ou ainda $a \leq x \leq b$, com $x \in \mathbb{R}$ e Semiabertos, fechado(aberto) de um lado e aberto(fechado) do outro. No caso em que tenhamos um número, digamos, $a \in \mathbb{R}$, temos dois tipos de semirreta, a saber: as fechadas à esquerda e à direita, com notação, $[a,\infty)$ e $(-\infty,a]$, respectivamente. Se $x \geq a$, para todo x no conjunto $\mathcal{C}$, dizemos que o conjunto é limitado inferiormente, enquanto se $x \leq a$, para todo $x \in \mathcal{C}$, dizemos que o conjunto é limitado superiormente. Enfim, um conjunto $\mathcal{C}$ é chamado limitado se for limitado inferior e superiormente, isto é, está contido num intervalo fechado.

DEFINIÇÃO 7.1.2. MÓDULO NAS DESIGUALDADES

Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $r > 0$. Todo número $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x-a| < r$ denota um intervalo (pode ser aberto ou fechado, nesse caso, com o sinal $\leq$) com centro em a e $|x-a| > r$ fora do intervalo (pode ser aberto à esquerda (à direita) ou fechado à esquerda (à direita), nesse caso, $\geq$ ($\leq$).

LEMA 7.1.1. SE $A \geq 0$ E $-A \leq a \leq +A$ ENTÃO $|a| \leq A$.

A tese é evidente para $a = 0$. Para $a > 0$, temos $|a| = a$ e a tese decorre da dupla desigualdade, $|a| \leq A$. Se, agora, $a < 0$, multiplica-se a dupla desigualdade por -1, de onde segue $A \geq -a = |a|$.

DEFINIÇÃO 7.1.3. SEQUÊNCIA

Definimos sequência (ou sucessão), com notação (a_n), como toda correspondência dos números naturais no conjunto dos reais.

EXEMPLO 7.1. NOMENCLATURA

A associação de cada número natural ($n \geq 1$) com a sua raiz quadrada fornece a sequência, cujos termos são $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n}$. Aqui, $\sqrt{n}$ é o chamado termo geral da sequência. Os termos de uma sequência são $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, sendo a_n o seu termo geral, uma vez que, a partir dele, percorrendo os naturais, podemos obter qualquer um de seus termos, a partir da substituição pelo valor de n.

DEFINIÇÃO 7.1.4. MONOTONIA

Uma sequência (a_n) de números reais é dita monótona se $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots$, chamada monótona crescente ou, enquanto, se $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots$, chamada monótona decrescente. Se não tivermos contemplados os sinais de igualdade, inserimos a palavra estritamente, isto é, se $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots$, chamada estritamente crescente ou, se $a_1 > a_2 > \cdots > a_n > \cdots$, chamada estritamente decrescente, facultando-se o nome monótona. Se não valer nenhuma das quatro possibilidades dizemos não monótonas. Vamos apresentar o critério de Cauchy, relativo à convergência de uma sequência, isto é, uma maneira de discernir se uma sequência é convergente sem, entretanto, ter que calcular o limite. Antes de apresentarmos o teorema (critério) de Cauchy, necessitamos da definição de sequência de Cauchy e uma sua consequência natural[1].

DEFINIÇÃO 7.1.5. SEQUÊNCIA DE CAUCHY

Dizemos que uma sequência (a_n) de número reais é uma sequência/sucessão de Cauchy, ou ainda, uma sequência fundamental, quando, dado $N \in \mathbb{N}$, existir um n_0 de modo que $m, n \geq n_0$, tenhamos $|a_m - a_n| < \dfrac{1}{N}$. A partir dessa definição temos que: o conjunto dos termos de uma sequência fundamental é limitado. Enfim, toda sequência convergente de números reais é uma sequência fundamental.

TEOREMA 7.1.1. TEOREMA DE CAUCHY

Uma sequência de números reais é convergente se, e somente se, for uma sequência fundamental.

Esse teorema garante que se a sequência for uma sequência de Cauchy (sequência fundamental) então a sequência de números reais é convergente, sem a necessidade de calcularmos o limite.

[1] Antes de continuarmos, ressaltamos que, na referência [8] pode ser encontrada uma longa série de exercícios envolvendo limites, derivadas (Capítulo 8) e integrais (Capítulo 9), além das equações diferenciais que fogem ao escopo do presente trabalho [8].

7.2 Frações parciais 1

Vamos discutir o que se entende por frações parciais, de um modo geral, tendo em mente que tal tópico desempenha papel importante, no sentido de simplificações, tanto nas derivadas, quanto nas integrais, que serão abordadas nos capítulos que seguem.

Começamos com o conceito de fração, associado a um quociente, as quais podem ser classificadas como: fração própria (o numerador é menor que o denominador), fração imprópria (o numerador é maior que o denominador) e fração aparente (o numerador é um múltiplo do denominador, isto é, resulta num inteiro). Vamos estender esse conceito para as chamadas frações algébricas, quociente de dois polinômios, nas quais comparamos os graus dos polinômios no numerador e no denominador. Então, classificamos as frações algébricas como: própria (grau do numerador é menor que o grau do denominador), imprópria (grau do numerador é maior que o grau do denominador) e aparente (numerador apresenta um fator igual ao denominador, isto é, quando é possível a simplificação, resulta numa fração algébrica cujo denominador é um número). Passemos, de imediato, a abordar alguns exemplos.

EXEMPLO 7.2. FRAÇÕES ALGÉBRICAS

Comecemos com exemplos de frações algébricas próprias

$$\frac{3x^2}{x^3+1}, \qquad \frac{x^3+12}{x^5+15x^4}, \qquad \frac{x^2+7x+1}{x^4+3x^2+1},$$

que têm, todas, o grau do numerador menor que o grau do denominador.

Por outro lado, exemplos de frações algébricas impróprias são

$$\frac{x^3+1}{3x^2}, \qquad \frac{x^5+15x^4}{x^3+12}, \qquad \frac{x^4+3x^2+1}{x^2+7x+1},$$

que têm, todas, o grau do numerador maior que o grau do denominador. Essas podem, então, ser escritas na forma de uma soma de duas parcelas, uma inteira (denominador independente de x) e outra uma fração algébrica própria

$$\frac{x}{3}+\underbrace{\frac{1}{3x^2}}_{\text{própria}}, \qquad (x^2+15)-\underbrace{\frac{12x^2+180}{x^3+12}}_{\text{própria}}, \qquad (x^2-7x+51)-\underbrace{\frac{350x+50}{x^2+7x+1}}_{\text{própria}}.$$

Enfim, exemplos de funções algébricas aparentes são

$$\frac{x^3+3x^2}{x+3}, \qquad \frac{x^4-16}{8x^2+32}, \qquad \frac{x^3-3x^2+3x-1}{5x^2-10x+5},$$

que, após simplificadas, são escritas, respectivamente, na forma

$$x^2, \qquad \frac{x^2-4}{8}, \qquad \frac{x-1}{5},$$

desde que as operações estejam definidas.

EXEMPLO 7.3. REDUÇÃO AO MESMO DENOMINADOR

Vamos apresentar o conceito de fração parcial através de um simples exemplo. Começamos por somar as frações

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2x-1}. \tag{7.1}$$

Para tal, reduzimos ao mesmo denominador por meio do mínimo múltiplo comum, logo

$$\frac{2x-1}{(x+1)(2x-1)}+\frac{x+1}{(x+1)(2x-1)}=\frac{3x}{(x+1)(2x-1)}. \tag{7.2}$$

Vamos, agora, pensar no processo inverso, isto é, temos a fração

$$\frac{3x}{(x+1)(2x-1)}$$

como escrevê-la na forma da Eq.(7.1), uma soma de frações, as chamadas frações parciais. Note que o grau do numerador é menor que o grau do denominador, caso contrário devemos explicitar a parte inteira e a parte própria à qual se dará o procedimento de escrever as frações parciais.

Então, a fim de obter essas frações parciais, conforme EXEMPLO 7.3, vamos abordar alguns casos envolvendo diferentes formas para o denominador, tendo em mente sempre que a fração é própria, o grau do numerador é menor que o grau do denominador.

1. DENOMINADOR APRESENTA FATORES NA FORMA $ax+b$ COM $a,b,\in\mathbb{R}$ E $a\neq 0$. Seja $x\in\mathbb{R}$ com $x\neq -1$, $x\neq 1/2$ e $x\neq 1$. Escreva o quociente

$$\frac{2x-4}{(x+1)(2x-1)(x+2)}$$

como uma soma de frações.

Claramente, não temos como simplificar o que caracteriza uma fração própria. Logo, vamos procurar as constantes reais A, B e C de tal modo que tenhamos

$$\frac{2x-4}{(x+1)(2x-1)(x+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{2x-1}+\frac{C}{x+2}.$$

Reduzindo ao mesmo denominador no segundo membro obtemos a identidade, já simplificando os denominadores

$$2x-4=A(2x-1)(x+2)+B(x+1)(x+2)+C(x+1)(2x-1).$$

Antes de prosseguir, façamos um comentário. Podemos, utilizando a propriedade distributiva e identidade de polinômios, escrever um sistema de três equações e três incógnitas, cuja solução fornece as constantes A, B e C. Por outro lado, como a identidade é válida para todo $x\in\mathbb{R}$, substituímos no valor de x, ora $x=-1$, ora $x=1/2$, ora $x=-2$, que são as raízes do denominador, de modo a obter, diretamente, A, B e C, respectivamente.

Então, primeiramente, substituímos $x=-1$, de onde segue a identidade

$$2\cdot(-1)-4=A[2\cdot(-1)-1][(-1)+2]$$

logo $A=2$. Agora, com o mesmo procedimento, substituímos $x=1/2$

$$2\cdot(1/2)-4=B[(1/2)+1][(1/2)+2]$$

logo, $B=-4/5$. Enfim, para $x=-2$ obtemos

$$2\cdot(-2)-4=C[(-2)+1][2\cdot(-2)-1]$$

que fornece $C=-8/5$. De posse das constantes, podemos escrever as frações parciais, conforme segundo membro da igualdade a seguir

$$\frac{2x-4}{(x+1)(2x-1)(x+2)}=\frac{2}{x+1}-\frac{4/5}{2x-1}-\frac{8/5}{x+2},$$

que é o resultado desejado.

2. Denominador contém fatores na forma $ax+b$ com $a,b,\in\mathbb{R}$ e $a\neq 0$, apresentando potências maiores que um. Escrever a fração

$$\frac{3x+10}{(x+4)^2}$$

como uma soma de frações parciais.

Aqui, também, cabe um comentário. Adicionando e/ou subtraindo as parcelas no numerador, podemos escrevê-lo numa das formas a seguir

$$\frac{(x+4)+(2x+6)}{(x+4)^2}=\frac{2\cdot(x+4)+(x+2)}{(x+4)^2}=\frac{2}{x+4}+\frac{x+2}{(x+4)^2} \tag{7.3}$$

que se apresentam como somas de frações. Por outro lado, podemos escrever uma soma de duas frações com o mesmo número da diferença do grau do denominador e o grau do numerador, isto é, devemos determinar $A,B,C\in\mathbb{R}$ de modo que

$$\frac{3x+10}{(x+4)^2}=\frac{A}{x+4}+\frac{Bx+C}{(x+4)^2}.$$

No primeiro membro, o grau do numerador é um e o do denominador é dois, logo a diferença é um. Então, a primeira fração no segundo membro já tem a diferença igual a um, bem como a segunda, com a inserção de um polinômio de grau um no numerador, o que justifica $Bx+C$.

Neste caso, vamos nos deparar com um número de incógnitas maior que o número de equações levando a um sistema possível e indeterminado e que, após expressarmos as constantes em função de uma delas, podemos escrever

$$\frac{3x+10}{(x+4)^2}=\frac{A}{x+4}+\frac{(3-A)x+(10-4A)}{(x+4)^2}$$

que, no caso em que $A=2$, recupera a última igualdade na Eq.(7.3).

Diante dessa indeterminação, é costume optar pela escolha, neste caso, $A=3$ de onde segue

$$\frac{3x+10}{(x+4)^2}=\frac{3}{x+4}-\frac{2}{(x+4)^2}$$

ou seja, procuram-se as constantes exatamente como no caso anterior no sentido de escrever uma constante para cada um dos fatores, isto é, do grau um até a potência que está elevado esse fator, aqui, dois.

No caso em que temos apenas um fator no denominador, existe uma maneira bastante prática. Considere, ainda, o mesmo exemplo anterior

$$\frac{3x+10}{(x+4)^2}.$$

Introduza uma nova variável, digamos, t, de modo que $x+4=t$ e, isolando x obtemos $x=t-4$. Substituindo no quociente, obtemos

$$\frac{3(t-4)+10}{t^2}=\frac{3t-2}{t^2}=\frac{3}{t^1}-\frac{2}{t^2}$$

que, voltando na incógnita x, recupera o resultado obtido anteriormente.

3. DENOMINADOR CONTÉM FATORES NA FORMA $a^2x+bx+c$ COM $a,b,c\in\mathbb{R}$ E $a\neq 0$, QUE NÃO PODEM SER FATORADOS. Note que, neste caso, se $a=0$ e $b\neq 0$ recuperamos o caso anterior. Aqui, devemos, necessariamente, considerar frações parciais com numerador do tipo $dx+e$ com $d,e\in\mathbb{R}$ e $d\neq 0$. Escreva o quociente

$$\frac{4}{(x-1)(x^2+1)^2}$$

com frações parciais, isto é, determine constantes $A,B,C,D,E\in\mathbb{R}$ de modo que

$$\frac{4}{(x-1)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Antes de discutirmos esse caso, ressaltamos que: no particular caso em que o denominador só contenha termos da forma (x^2+a_i), com $a_i>0$ e $i=1,2,\ldots$ podemos, em analogia ao CASO 1, substituir diretamente as raízes que, neste caso são imaginários puros.

Após reduzir ao mesmo denominador e simplificar os denominadores, obtemos a identidade de polinômios

$$4=A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x^2+1)(x-1)+(Dx+E)(x-1)\cdot$$

Em analogia ao CASO 1, considerando, na identidade anterior, $x=1$ obtemos diretamente $A=1$. Para as demais constantes devemos proceder com o sistema nas incógnitas B,C,D,E, como a seguir

$$\begin{array}{rcrcl}
x^4 & : & 0 & = & 1+B \\
x^3 & : & 0 & = & -B+C \\
x^2 & : & 0 & = & 2+B-C+D \\
x & : & 0 & = & -B+C-D+E \\
\text{cte} & : & 4 & = & 1-C-E
\end{array}$$

Antes de resolver o sistema, é conveniente mencionar que poderíamos ter procedido, desde o início, com o sistema contendo a constante A que nos levaria a um sistema com cinco equações e cinco incógnitas. Diante de nossa opção, isto é, em analogia ao CASO 1 obtivemos um sistema de cinco equações e quatro incógnitas que nos garante que uma delas pode ser negligenciada no sentido que será automaticamente satisfeita. Vamos eliminar, por exemplo, a quarta equação de modo que o sistema a ser resolvido é

$$\begin{cases} 0 &= 1+B \\ 0 &= -B+C \\ 0 &= 2+B-C+D \\ 4 &= 1-C-E \end{cases}$$

com solução $B=-1$, $C=-1$, $D=-2$ e $E=-2$ que, como já mencionamos, satisfaz a equação que foi eliminada, pois substituindo esses valores temos: $-(-1)+(-1)-(-2)+(-2)=0$.

4. Diferença do grau do denominador e do numerador é maior que um. Expresse a fração

$$\frac{3x+10}{(x+1)^3}$$

em frações parciais.

Você deve estar convencido que, em analogia ao Caso 2, existe um número indefinido de possibilidades sim, neste caso o número de constantes a serem determinadas é maior (não só uma, como no Caso 2) o que dificulta o problema, em vez de simplificar. Podemos escrever, dentre outras possibilidades

$$\frac{3x+10}{(x+1)^3} = \frac{2}{x+1} - \frac{x-4}{(x+1)^2} - \frac{x^2+4x-4}{(x+1)^3}$$

ou

$$\frac{3x+10}{(x+1)^3} = \frac{1}{x+1} - \frac{x^2-x-9}{(x+1)^3}.$$

Mas, como optamos pela simplicidade digamos, uma forma canônica (única) de obter as constantes, devemos determiná-las a partir de

$$\frac{3x+10}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}$$

com $A,B,C \in \mathbb{R}$.

Aqui, também, reduzimos ao mesmo denominador e simplificando obtemos a identidade de polinômios

$$3x+10 = A(x+1)^2 + B(x+1) + C\cdot$$

Por um procedimento análogo ao Caso 3, obtemos C substituindo $x=-1$ de onde segue $C=7$. As outras duas constantes devem ser determinadas através do sistema

$$\begin{array}{ccrcl} x^2 & : & 0 & = & A \\ x & : & 3 & = & 2A+B \\ \text{cte} & : & 10 & = & A+B+C \end{array}$$

com solução $A=0$ e $B=3$. A última equação é automaticamente satisfeita. Logo, a expressão em frações parciais toma a forma

$$\frac{3x+10}{(x+1)^3} = \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{7}{(x+1)^3}$$

Para concluir, algumas palavras sobre a verificação do resultado. A fim de fazer a verificação, em relação às frações parciais, isto é, verificar que a divisão foi efetuada corretamente, basta que substituamos um valor no lugar do x.

7.3 Frações parciais 2

O chamado método de decomposição em frações parciais de uma fração racional desempenha importante papel seja nas derivadas quanto nas integrais. Em particular, o problema da integral é mais sensível, pois nem sempre é fácil efetuar a integração de uma fração racional. Logo, escrever essa fração racional como soma de frações parciais simplifica a integração.

Ainda mais, não menos importante, a metodologia é válida para o campo dos complexos porém, aqui, vamos nos restringir ao campo dos reais. Enfim, só devemos nos preocupar com denominadores de uma das seguintes formas $ax+b$ com $a,b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, bem como cx^2+dx+e com $c,d,e \in \mathbb{R}$ e $c \neq 0$, pois para qualquer outro grau do polinômio podemos decompô-lo em uma dessas duas formas, já levando em conta uma sua possível potência, isto é, na forma $(ax+b)^n$ com $n = 2,3,4,\ldots$ e $(cx^2+dx+e)^m$ com $m = 2,3,4,\ldots$

Em geral, como encontrado em vários livros de cálculo ou mesmo de álgebra, o método se reduz a resolver um sistema linear associado às constantes a serem determinadas, que nem sempre é simples de ser resolvido. Uma outra maneira é, após obtermos uma igualdade de polinômios, substituir valores diferentes das raízes dos denominadores de modo a determinar as constantes. Aqui, nesse texto, vamos optar por uma maneira alternativa [18] para abordar o método de decomposição em frações parciais.

A partir de um particular exemplo, vamos discutir as três maneiras de se abordar a metodologia. É importante ressaltar que se vamos prezar a unidicade do método é fundamental que todos os numeradores das frações parciais sejam constantes para denominadores da forma $(ax+b)^n$ com $a,b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ sendo $n = 1,2,3,\ldots$, bem como numeradores da forma $\alpha x+\beta$ com $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ e $\alpha \neq 0$ para denominadores da forma $(cx^2+dx+e)^m$ com $c,d,e \in \mathbb{R}$ e $c \neq 0$ sendo $m = 1,2,3,\ldots$

A fim de discutir a metodologia através das três maneiras, consideremos a seguinte fração racional

$$\Lambda(x) = \frac{2x^4-3x^3-x^2+3x+1}{x(x-1)^2(x^2+1)} \tag{7.4}$$

com $x \in \mathbb{R}$ e $x \neq 0$ e $x \neq 1$. Note que, nem x nem $(x-1)$ são fatores do numerador (nesse caso poderíamos simplificar, reduzindo os graus do numerador e do denominador). Ainda mais, o grau do numerador é menor que o grau do denominador, caso contrário deveríamos escrever a fração racional como a soma de um polinômio adicionado de uma outra fração racional cujo grau do numerador é menor que o grau do denominador.

Vamos denominar as três maneiras de abordagem como: utilizando sistema, isto é, a maneira mais trabalhosa e, digamos, propícia de cometermos um erro; utilizando um sistema simplificado, isto é, uma combinação de modo a reduzir o problema a um sistema mais simples e, a terceira maneira, uma alternativa que, como vamos ver, é aquela que menos propicia cometer um erro, pois é a mais simples.

7.3.1 Utilizando um sistema

A partir da Eq.(7.4) devemos obter as constantes $A,B,C,D,E \in \mathbb{R}$ tais que tenhamos $\Lambda(x)$ escrito na seguinte forma

$$\Lambda(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}$$

isto é, expressando o quociente como uma soma de frações, as chamadas frações parciais.

Reduzindo ao mesmo denominador, podemos escrever

$$2x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x + 1 =$$

$$= A(x^2+1)(x-1)^2 + Bx(x-1)(x^2+1) + Cx(x^2+1) + x(Dx+E)(x-1)^2$$

que nos leva, após a identidade de polinômios, ao seguinte sistema linear

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2 & = & A+B+D \\ -3 & = & -2A-B+C-2D+E \\ -1 & = & 2A+B+D-2E \\ 3 & = & -2A-B+C+E \\ 1 & = & A \end{array}\right.$$

ou seja, um sistema linear de cinco equações e cinco incógnitas. Da última equação temos $A = 1$, de onde segue, substituindo nas outras equações que contêm A, o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1 & = & B+D \\ -1 & = & -B+C-2D+E \\ -3 & = & B+D-2E \\ 5 & = & -B+C+E \end{array}\right.$$

um sistema de quatro equações e quatro incógnitas. Subtraindo a segunda da quarta temos

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1 & = & B+D \\ -1 & = & -B+C-2D+E \\ -3 & = & B+D-2E \\ -6 & = & -2D \end{array}\right.$$

de onde segue $D = 3$ e $B = -2$. Enfim, resta o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3 & = & C+E \\ -4 & = & -2E \end{array}\right.$$

logo $E = 2$ e $C = 1$. Temos, então, voltando com as constantes,

$$\Lambda(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{3x+2}{x^2+1}.$$

A fim de testar a veracidade da identidade, escolhemos, ao acaso, um número diferente de um zero do denominador, por exemplo, $x = -1$ e substitímos na expressão, obtendo

$$\Lambda(-1) = -1 + 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

que é exatamente o mesmo valor que obtemos quando substituímos $x = -1$ na fração racional.

Note que, dependendo do número de constantes a serem determinadas, este método é passível de erros, pois o número de incógnitas e equações nem sempre fornece soluções simples.

7.3.2 Utilizando um sistema simplificado

Escolhemos esse nome, pois ainda vamos conduzir o problema inicial a um outro tipo de sistema. Primeiramente, escrevemos, apenas os numeradores

$$2x^4-3x^3-x^2+3x+1=$$

$$=A(x^2+1)(x-1)^2+Bx(x-1)(x^2+1)+Cx(x^2+1)+x(Dx+E)(x-1)^2\cdot$$

A partir dessa identidade, vamos substituir em ambos os lados, primeiramente, $x=0$ e depois $x=1$, isto é, as raízes reais no denominador. Logo, para $x=0$ temos $A=1$ enquanto, $x=1$ fornece $C=1$. Com esses valores, voltando na expressão anterior, obtemos

$$2x^4-3x^3-x^2+3x+1=$$

$$=(x^2+1)(x-1)^2+Bx(x-1)(x^2+1)+x(x^2+1)+x(Dx+E)(x-1)^2$$

o que nos leva a um sistema (simplificado) de quatro equações a quatro incógnitas,

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1 & = & B+D \\ -2 & = & -B-2D+E \\ -3 & = & B+D-2E \\ 4 & = & -B+E \end{array}\right.$$

Subtraindo a primeira equação da terceira temos $E=2$, logo $B=-2$ e $D=3$, isto é, exatamente a solução obtida pelo método anterior, apenas com um pouco menos de álgebra.

7.3.3 Método alternativo

Este método, alternativamente ao primeiro deles, parte da igualdade

$$2x^4-3x^3-x^2+3x+1=$$

$$=(x^2+1)(x-1)^2+Bx(x-1)(x^2+1)+x(x^2+1)+x(Dx+E)(x-1)^2$$

conforme obtida no método anterior, que pode ser escrita na forma

$$x^4-2x^3-3x^2+4x=Bx(x-1)(x^2+1)+x(Dx+E)(x-1)^2$$

isto é, restam apenas três constantes a serem determinadas, conforme o método anterior. A diferença é que, aqui, escrito dessa maneira, $x(x-1)$ é fator comum no segundo membro e também é no primeiro membro. Note que, se não for também no primeiro membro, algo de errado aconteceu (é uma maneira de conferir a veracidade). Logo, podemos então simplificar de modo a obter,

$$x^2-x-4=B(x^2+1)+(Dx+E)(x-1)\cdot$$

Agora, basta substituir $x=0$ e $x=1$, as raízes do denominador da fração racional, de onde temos, para $x=0$

$$-4=B-E$$

enquanto, para $x=1$ temos

$$-4=2B$$

de onde segue $B=-2$ e $E=2$. Voltando com esses valores podemos escrever

$$x^2-x-4=-2(x^2+1)+(Dx+2)(x-1)$$

que, para $x=-1$ (pode ser qualquer valor diferente de $x=0$ e $x=1$) fornece

$$-4=-4+(-D+2)(-2)$$

logo $D=2$. Com esses valores para as constantes, obtemos o mesmo resultado das duas outras maneiras porém, a nosso ver, de modo mais simples no sentido de menos álgebra.

7.4 Limite

Antes de apresentarmos a definição de limite formalmente, vamos, intuitivamente, apresentá-lo a partir de um exemplo, uma progressão geométrica de razão menor que a unidade, digamos, $q=1/2$. Então, sendo $a \in \mathbb{R}$, temos

$$a, \frac{a}{2}, \frac{a}{4}, \frac{a}{8}, \ldots, \frac{a}{2^n}$$

e dizemos que a variável se aproxima de zero como um limite, isto é, quanto maior for $n \in \mathbb{N}$, mais próximo de zero é o quociente $1/2^n$. É importante mencionar que o limite, em geral, é uma expressão para calcular um erro, relativo a uma mudança. Por exemplo, considerando $n=100$ e $n=101$ temos um número muito pequeno de tal modo que, em módulo, temos $|1/2^{101}-1/2^{100}|$, isto é, uma mudança de 100 para 101 acarreta um número que se aproxima de zero. Ainda mais, a noção de limite está relacionada com termos da sequência com índices suficientemente grandes.

DEFINIÇÃO 7.4.1. LIMITE

Sejam $L \in \mathbb{R}$ e $N \in \mathbb{N}$. Se, para todo $n \in \mathbb{N}$ (tão grande quando quisermos), existir $n_0(N)$, dependendo de N, tal que, para todo $n \geq n_0$, tenhamos

$$|a_n - L| < \frac{1}{N} \qquad \Longrightarrow \qquad L-\frac{1}{N} < a_n < L+\frac{1}{N}$$

dizemos que L é o limite da sequência (a_n). Ainda mais, se a sequência (a_n) tiver limite L, dizemos que é uma sequência convergente para L, caso contrário, dizemos que é uma sequência divergente.

DEFINIÇÃO 7.4.2. VIZINHANÇA

Chama-se vizinhança do número $L \in \mathbb{R}$ a cada intervalo de uma das formas $\left(L-\frac{1}{N}, L+\frac{1}{N}\right)$, vizinhança aberta ou $\left[L-\frac{1}{N}, L+\frac{1}{N}\right]$, vizinhança fechada.

Como já mencionamos, a noção de limite está relacionada com termos da sequência com índices suficientemente grandes, de onde segue a notação: n cresce indefinidamente, ou ainda, n se aproxima ou tende ao infinito. Utilizamos a notação

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim a_n.$$

EXEMPLO 7.4. POLÍGONO REGULAR INSCRITO NUM CÍRCULO

Considere um polígono regular de n lados. Calcular a área deste polígono expressando-a em termos do raio do círculo e do ângulo central. Tomar n tão grande quanto se queira, tendendo ao infinito, a fim de obter a área do círculo de raio r, como limite.

A área de um polígono regular de n lados, denotada por $\mathcal{A}_n$, inscrito em um círculo de raio r é igual ao produto de n pela área do triângulo isósceles de lados iguais a r e ângulo, por eles formado, igual a $\theta_n = 2\pi/n$ com $n = 3,4,\dots$ ou seja,

$$\mathcal{A}_n = n \cdot \frac{r^2}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

Tomando o limite para n indo ao infinito podemos escrever

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{A}_n = \lim_{n\to\infty} \pi r^2 \left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2\pi}{n}}\right] = \pi r^2 \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2\pi}{n}}\right].$$

Mostra-se [vamos fazê-lo um pouco mais a frente] que o limite entre os colchetes, chamado de limite trigonométrico (é um dos limites fundamentais), é igual a um de onde, denotando a área do círculo por $\mathcal{A}$, podemos escrever

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{A}_n \equiv \mathcal{A} = \pi r^2$$

resultado conhecido desde os tempos do sexto ano do EF.

Antes de apresentarmos o conceito de limite de uma função, devemos introduzir o conceito de ponto de acumulação. Em analogia ao exemplo no início da seção, vamos apresentar um exemplo similar a fim de verificar o que se entende por ponto de acumulação.

Considere o conjunto $\mathcal{C} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$. Ingenuamente podemos afirmar que os elementos de $\mathcal{C}$ estão se acumulando na vizinhança de zero. Note que um particular intervalo $(-\frac{1}{N}, \frac{1}{N})$, com $N \in \mathbb{N}$, contém o elemento $\frac{1}{N+1} \in \mathcal{C}$.

DEFINIÇÃO 7.4.3. PONTO DE ACUMUÇÃO

Considere um conjunto de números reais $\mathcal{C}$. Chama-se ponto de acumulação para $\mathcal{C}$ ao número real r, que pode ou não pertencer ao conjunto $\mathcal{C}$ quando, para todo $N \in \mathbb{N}$, tão grande quanto desejarmos, existir ao menos um ponto do conjunto $\mathcal{C}$, diferente de r e pertencente ao intervalo aberto $(r - \frac{1}{N}, r + \frac{1}{N})$.

DEFINIÇÃO 7.4.4. LIMITE DE FUNÇÃO

Uma função $\mathsf{f} : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ tem limite L no ponto x_0 quando, dado $N \in \mathbb{N}$ arbitrário, tão grande quando quisermos, existir um $M \in \mathbb{N}$, dependendo de N, tal que <u>se</u> x está em $\mathcal{C}$, satisfazendo a desigualdade $0 < |x - x_0| < 1/M$, <u>então</u> $|\mathsf{f}(x) - L| < 1/N$, com notação

$$\lim_{x\to x_0} \mathsf{f}(x) = L.$$

EXEMPLO 7.5. ESBOÇO GRÁFICO

Esboçar um gráfico da função no caso em que tenhamos $x_0 \in [a,b]$ e $\mathsf{f}(x) = -x^2 + 10x$. Explicite para $x_0 = 6$. Ver Figura 7.1.

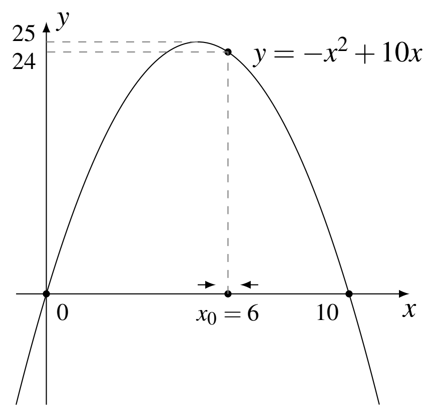


Figura 7.1: Esboço do gráfico da parábola $y = -x^2 + 10x$.

EXEMPLO 7.6. COMPLEMENTANDO O ANTERIOR

Com os dados do EXEMPLO 7.5, vamos verificar que

$$\lim_{x \to x_0} (-x^2 + 10x) = -x_0^2 + 10x_0.$$

Assim, para um dado número $N \in \mathbb{N}$, existe um número $M \in \mathbb{N}$ tal que <u>se</u> $0 < |x - x_0| < 1/M$, <u>então</u> $|-x^2 + 10x + x_0^2 - 10x_0| < 1/N$. Escrevemos as desigualdades

$$\begin{aligned}
|\mathsf{f}(x) - L| &= |-x^2 + 10x + x_0^2 - 10x_0| \\
&= |(x - x_0)(x - x_0 + 2x_0) - 10(x - x_0)| \\
&\leq |x - x_0|(|x - x_0| + 2|x_0|) - 10|x - x_0| \\
&\leq \frac{1}{M}\left(\frac{1}{M} + 2|x_0|\right) - 10 \cdot \frac{1}{M} \\
&\leq \frac{1}{M}\left(\frac{1}{M} + 2|x_0| - 10\right) < \frac{1}{N}
\end{aligned}$$

Escolhendo M suficientemente grande tal que valha a segunda desigualdade na última passagem, segue o resultado:

$$\text{SE} \qquad |x - x_0| < \frac{1}{M} \qquad \text{ENTÃO} \qquad |-x^2 + 10x + x_0^2 - 10x_0| < \frac{1}{N}$$

Basta que escolhamos M tal que

$$\frac{1}{M}\left(\frac{1}{M} + 2|x_0| - 10\right) < \frac{1}{M}(1 + 2|x_0| - 10) < \frac{1}{N}$$

isto é, $M > N(2|x_0| - 9)$. E, para $x_0 = 6$, basta considerar $M > 3N$.

DEFINIÇÃO 7.4.5. LIMITES LATERAIS

Se $f(x)$ tende ao limite L_1, quando $x \to a$ de modo que x toma só valores inferiores a este, denotamos por

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = L_1$$

sendo L_1 o limite da função $f(x)$ no ponto a pela esquerda. Por outro lado, no caso em que x toma só valores maiores que a denotamos

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = L_2$$

sendo L_2 o limite da função $f(x)$ no ponto a pela direita.
Se $L_1 = L_2 = L$ dizemos que L é o limite da função $f(x)$ no ponto $x = a$.

Antes de apresentarmos as propriedades dos limites, em particular, visando o cálculo explícito, isto é, sem utilizar a definição, introduzimos o conceito de infinitesimal.

DEFINIÇÃO 7.4.6. INFINITESIMAL

A função $\mu = \mu(x)$ denomina-se infinitamente pequena (ou infinitesimal) quando $x \to a$ ou quando $x \to \infty$, temos

$$\lim_{x\to a} \mu(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to\infty} \mu(x) = 0.$$

Mostra-se que a soma de um número finito de infinitesimais é uma função infinitamente pequena.

Vamos mencionar algumas propriedades envolvendo limites, todas elas como teoremas cujas demonstrações podem ser encontradas na referência [17]. Aqui, em particular, visamos as aplicações no sentido de calcular explicitamente um limite.

Sejam $u = u(x)$ e $v = v(x)$ duas funções de uma variável real x, α uma constante e os seguintes limites

$$\lim_{x\to a} u(x) = A \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to a} v(x) = B.$$

PROPRIEDADE 7.4.1. SOMA E SUBTRAÇÃO

O limite da soma (diferença) é a soma (diferença) dos limites

$$\lim_{x\to a}(u \pm v) = \lim_{x\to a} u \pm \lim_{x\to a} v = A \pm B$$

PROPRIEDADE 7.4.2. PRODUTO

O limite do produto é o produto dos limites

$$\lim_{x\to a}(u \cdot v) = \lim_{x\to a} u \cdot \lim_{x\to a} v = A \cdot B.$$

No caso particular em que temos o produto de uma função por uma constante real, digamos α, obtemos

$$\lim_{x\to a}(\alpha \cdot u) = \lim_{x\to a} \alpha \cdot \lim_{x\to a} u = \alpha \cdot B$$

Propriedade 7.4.3. Quociente

O limite do quociente é o quociente do limite desde que o limite do denominador não seja zero

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to a} u}{\lim\limits_{x\to a} v} = \frac{A}{B}$$

com $\lim\limits_{x\to a} v \neq 0$.

No caso em que $\lim\limits_{x\to a} u = 0 = \lim\limits_{x\to a} v$, o quociente é indeterminado e deve ser tratado de outro modo, como vamos ver mais adiante. Esse tipo de indeterminação desempenha papel fundamental na formalização do conceito de derivada, conforme Capítulo 8.

Além das quatro operações básicas, soma, subração, produto e quociente, mencionamos outras operações, a saber: o limite de uma potência é a potência do limite; o limite do logaritmo é o logaritmo do limite e a exponenciação do limite é o limite da exponenciação, desde que definidas as operações. Em particular, a radiciação pode ser entendida como uma potenciação sendo o expoente um número não inteiro.

Exemplo 7.7. Soma e subtração

Seja $x \in \mathbb{R}$. Considere as funções $y_1(x) = x^2 - 2x$ e $y_2(x) = (x+1)^2$. Calcule o limite $\lim\limits_{x\to 3} y(x)$ quando

$$\text{a)} \quad y(x) = y_1(x) + y_2(x) \qquad \text{e} \qquad \text{b)} \quad y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

a) Visto que o limite da soma é a soma dos limites, podemos escrever, após substituir diretamente $x = 3$,

$$\lim_{x\to 3} y(x) = \lim_{x\to 3} y_1(x) + \lim_{x\to 3} y_2(x) = (3^2 - 2\cdot 3) + (3+1)^2 = 3 + 16 = 19.$$

b) Em analogia ao anterior, isto é, o limite da diferença é a diferença dos limites, obtemos

$$\lim_{x\to 3} y(x) = \lim_{x\to 3} y_1(x) - \lim_{x\to 3} y_2(x) = (3^2 - 2\cdot 3) - (3+1)^2 = 3 - 16 = -13.$$

Exemplo 7.8. Produto e quociente

Seja $x \in \mathbb{R}$. Considere as funções $y_1(x) = 3\cdot(x^2+1)$ e $y_2(x) = (x-1)^2$. Calcule o limite $\lim\limits_{x\to -2} y(x)$, desde que definido, quando

$$\text{a)} \quad y(x) = y_1(x)\cdot y_2(x) \qquad \text{e} \qquad \text{b)} \quad y(x) = y_1(x) \div y_2(x)$$

a) Visto que o limite do produto é o produto dos limites, podemos escrever, após substituir diretamente $x = -2$,

$$\lim_{x\to -2} y(x) = \lim_{x\to -2} y_1(x)\cdot \lim_{x\to -2} y_2(x) = \{3\cdot[(-2)^2+1]\}\cdot\{[(-2)-1]^2\} = 15\cdot 9 = 135.$$

b) Em analogia ao anterior, isto é, o limite do quociente é o quociente dos limites, desde que definido, obtemos

$$\lim_{x\to -2} y(x) = \lim_{x\to -2} y_1(x) \div \lim_{x\to -2} y_2(x) = \{3\cdot[(-2)^2+1]\} \div \{[(-2)-1]^2\} = 15 \div 9 = 5/3.$$

EXEMPLO 7.9. EXPONENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO

Seja $x \in \mathbb{R}$. Considere as funções $y_1(x) = x^2 + 2x + 4$ e $y_2(x) = (x-1)^2$. Calcule o limite $\lim\limits_{x\to 0} y(x)$, desde que definido, quando

$$\text{a)} \quad 2^{y_1(x)} \qquad\qquad \text{e} \qquad\qquad \text{b)} \quad \sqrt[4]{y_2(x)}$$

a) Visto que o limite da exponenciação é a exponenciação do limite, podemos escrever, após substituir diretamente $x = 0$,

$$\lim_{x\to 0} 2^{y_1(x)} = 2^{\lim\limits_{x\to 0} y_1(x)} = 2^{\lim\limits_{x\to 0}[0^2+2\cdot 0+4]} = 2^4 = 16.$$

b) Em analogia ao anterior, isto é, o limite da raiz é a raiz do limite, desde que definido, obtemos

$$\lim_{x\to 0} y_2(x) = \lim_{x\to 0} \sqrt[4]{(x-1)^2} = \sqrt[4]{\lim_{x\to 0}(x-1)^2} = \sqrt[4]{1} = 1.$$

7.5 Limites fundamentais

Aqui vamos mostrar explicitamente o chamado limite fundamental trigonométrico, apresentado no EXEMPLO 3.11, bem como, o limite fundamental envolvendo a definição do número irracional, base dos logaritmos neperianos, e. Para esse fim, apresentamos primeiramente o chamado teorema do confronto ('sanduíche'), que garante a existência do limite de uma função real, $f(x)$, no domínio $\mathsf{D} \subseteq \mathbb{R}$, desde que essa função se encontre limitada inferior e superiormente por duas funções que convergem para o mesmo limite.

TEOREMA 7.5.1. TEOREMA DO CONFRONTO

Sejam $f_1(x)$, $f_2(x)$ e $f(x)$ funções reais definidas num domínio $\mathsf{D} \subseteq \mathbb{R}$ e a um ponto desse domínio. Se os limites, denotados por L, $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = L = \lim\limits_{x\to a} f_2$ existem e $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$ então

$$\lim_{x\to a} f(x) = L\cdot$$

Os números L e a podendo ser finitos ou $\pm\infty$.

EXEMPLO 7.10. TEOREMA DO CONFRONTO E A TRIGONOMETRIA

Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$$

Mostre que os limites laterais à esquerda e à direita são iguais a zero.

Começamos notando que a função $f(x)$ está definida em $x = 0$, uma vez que $f(0) = 0$. Vamos mostrar que os limites à esquerda e à direita são iguais a zero, isto é,

$$\lim_{x\to 0^+}\left[x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0 = \lim_{x\to 0^-}\left[x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

Visto que a função cosseno (raciocínio análogo vale para a função seno) é limitada à esquerda por -1 e à direita por $+1$, podemos escrever a dupla desigualdade

$$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq +1\cdot$$

Multiplicando essa dupla desigualdade por x^2 temos

$$-x^2 \leq x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2\cdot$$

Sabendo que $\lim\limits_{x\to 0^-}(-x^2) = 0 = \lim\limits_{x\to 0^+}(x^2)$ e utilizando o teorema do confronto, podemos escrever

$$\lim_{x\to 0}\left[x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0\cdot$$

Como os limites são iguais e têm o mesmo valor da função no ponto $x = 0$, dizemos que a função $f(x)$ é contínua em $x = 0$. A continuidade será discutida ao final do capítulo.

7.5.1 Limite trigonométrico

Utilizando o círculo trigonométrico e a definição das linhas trigonométricas, seno, cosseno e tangente, vamos mostrar que

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = 1,$$

chamado limite fundamental trigonométrico.

Em analogia ao apresentado no EXEMPLO 3.11, consideramos a mesma figura (Figura 7.2), reproduzida a seguir e tendo em mente a coincidência dos eixos dos senos com o eixo $y'y$, e dos cossenos, com o eixo $x'x$, os eixos das tangentes, paralelo ao eixo $y'y$ e das cotangentes, paralelo ao eixo $x'x$, sendo o ponto O o centro do círculo trigonométrico. Ainda mais, ressaltamos que apesar de estarmos considerando $x > 0$ o resultado é o mesmo se considerarmos $x < 0$.

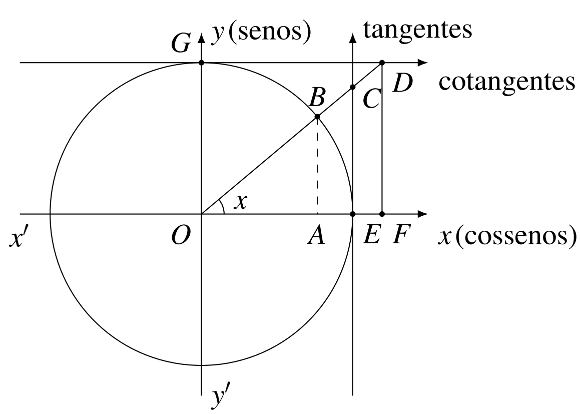


Figura 7.2: Limite fundamental $\operatorname{sen} x/x$.

É importante notar que temos o quociente de um número tão pequeno quanto se queira, tanto no numerador quanto no denominador, o que caracteriza uma indeterminação. Calcular o limite significa, levantar essa indeterminação.

Da Figura 7.2 podemos escrever a dupla desigualdade envolvendo áreas de triângulos, denotadas por A_t e setor circular, denotada por A_s,

$$A_t(OAB) < A_s(OEB) < A_t(OEC).$$

Explicitando essas áreas, a dupla desigualdade vem escrita na forma

$$\frac{\overline{OA}\cdot\overline{AB}}{2} < \frac{\widehat{OB}\cdot\overline{OE}}{2} < \frac{\overline{OE}\cdot\overline{EC}}{2}.$$

Lembrando que $\overline{OE} = 1$, raio da circunferência trigonométrica, enquanto $\overline{AB} = \operatorname{sen} x$; $\overline{OA} = \cos x$ e $\overline{EC} = \tan x$, podemos escrever

$$\cos x \cdot \operatorname{sen} x < 1 \cdot x < 1 \cdot \tan x.$$

Sem perda de generalidade, consideremos $x > 0$, de onde obtemos, já dividindo a dupla desigualdade por $\operatorname{sen} x$

$$\cos x < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x} \tag{7.5}$$

ou ainda, invertendo, na seguinte forma

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\operatorname{sen} x}{x} > \cos x.$$

Tomando x tão próximo de zero quanto se queira, $x \to 0$ (dizemos, x tendendo a zero) e lembrando que $\cos 0 = 1$, podemos escrever

$$1 > \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} > 1.$$

A partir do teorema do confronto (TEOREMA 7.5.1), concluímos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1,$$

chamado limite fundamental trigonométrico. É importante notar que, temos uma quantidade que está entre dois números iguais, isto é, a unidade, logo deve ser igual à unidade. Procedimento análogo para mostrar que, partindo da Eq.(7.5), vale a relação

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1.$$

EXEMPLO 7.11. *Calcule o limite* $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{3x}\right)$

Note que temos uma indeterminação. A fim de utilizar o limite fundamental trigonométrico, multiplicamos e dividimos o quociente por $2x$, logo

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{3x}\right) = \lim_{x\to 0} \left[\left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{2x}\right)\cdot\frac{2x}{3x}\right]$$

onde, na última passagem, trocamos a ordem dos fatores no denominador $2x$ por $3x$ e vice-versa. Usando o fato de que o limite do produto é o produto dos limites, podemos escrever

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{2x}\right)\cdot\frac{2x}{3x}\right] = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{2x}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x}.$$

No primeiro fator, encontramos o limite fundamental, pois uma simples mudança de variável $2x = t$, permite escrever

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{2x}\right)\cdot\frac{2x}{3x}\right] = \lim_{t\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right)\cdot\frac{2}{3},$$

onde já explicitamos o limite do segundo fator. Agora, sim, utilizando o limite fundamental obtemos

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{3x}\right) = \frac{2}{3}$$

que é o resultado desejado.

Ressaltamos que, imediatamente após o conceito de derivada, Capíulo 8, vamos inroduzir a chamada regra de l'Hôpital que permite o cálculo desse tipo de limite através de uma conveniente derivação.

EXEMPLO 7.12. *Calcule o limite* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x}\right)$

Aqui, também, temos a mesma indeterminação, isto é, zero dividido por zero. Começamos por multiplicar o numerador e o denominador por $1+\cos x$, pois, assim, vamos forçar o aparecimento do seno no numerador,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right).$$

Utilizando a relação fundamental da trigonometria no numerador, obtemos

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1+\cos x)}\right].$$

Visto que o limite do produto é o produto dos limites, reescrevemos a expressão anterior na seguinte forma

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\right).$$

O primeiro limite no segundo membro é o limite fundamental trigonométrico e é igual à unidade, enquanto o segundo limite, para $x\to 0$ é igual a zero, pois $\operatorname{sen} 0 = 0$ e o denominador não se anula para esse valor. Logo, obtemos

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x}\right) = 0$$

que é o resultado desejado.

7.5.2 Limite fundamental exponencial

O número e, base dos logaritmos naturais, foi introduzido como o número que satisfaz a igualdade $\ln x = 1$, bem como a desigualdade $2 < e < 3$. Vamos recuperar o que foi apresentado no Capítulo 6, quando da definição da função exponencial na base e, e que foi definido através de um limite.

Vamos recuperar o resultado apresentado no Capítulo 6, isto é, mostrar que vale o resultado, conhecido como um limite fundamental,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Utilizando o resultado do Exercício 40 do Capítulo 6, podemos escrever

$$\frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1.$$

Introduzindo a mudança $x = 1/n$ e rearranjando temos

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}} < \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} < 1$$

ou ainda, utilizando a propriedade dos logaritmos (potenciação), na seguinte forma

$$\frac{n}{1+n} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1.$$

Utilizando a inversa, isto é, exponenciando (base e) obtemos

$$e^{\frac{n}{1+n}} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e.$$

Tomando o limite $n \to \infty$ temos

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Em completa analogia podemos mostrar que

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

bem como

$$e^{\alpha} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n.$$

EXEMPLO 7.13. *Calcule o limite* $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$

Note que temos uma indeterminação do tipo 1^{∞}. A fim de levantar essa indeterminação, começamos com a mudança de variável $x = 3t$. Quando $x \to \infty$ implica $t \to \infty$, logo

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{2}} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{3t}{2}}.$$

Utilizando o fato que o limite de um expoente pode ser escrito como o limite elevado a esse expoente, podemos escrever

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{2}} = \left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^{\frac{3}{2}}.$$

O limite que está entre os colchetes é o limite fundamental exponencial, logo

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{3}{2}} = \sqrt{e^3},$$

que é o resultado desejado.

EXEMPLO 7.14. *Calcule o limite* $\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln(3+x)^{\frac{2}{x}}\cdot\dfrac{\tan x}{\ln 3}\right]$

Aqui, temos uma indeterminação do tipo $\infty\cdot 0$. Utilizando a propriedade dos logaritmos relativa ao expoente do logaritmando, cujo expoente passa multiplicando o logaritimo e que a tangente é o quociente do seno pelo cosseno, temos

$$\lim_{x\to 0}\left[\ln(3+x)^{\frac{2}{x}}\cdot\frac{\tan x}{\ln 3}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{2}{x}\cdot\ln(3+x)\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x\cdot\ln 3}\right].$$

Visto que o limite do produto é o produto dos limites e rearranjando podemos escrever

$$\lim_{x\to 0}\left[\ln(3+x)^{\frac{2}{x}}\cdot\frac{\tan x}{\ln 3}\right]=\frac{2}{\ln 3}\lim_{x\to 0}[\ln(3+x)\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$$

uma vez que $\cos 0=1$. Utilizando o limite fundamental trigonométrico e simplificando obtemos

$$\lim_{x\to 0}\left[\ln(3+x)^{\frac{2}{x}}\cdot\frac{\tan x}{\ln 3}\right]=\frac{2}{\ln 3}\cdot\ln 3\cdot 1=2$$

que é o resultado desejado.

EXEMPLO 7.15. LIMITE LOGARÍTMICO

Mostre que

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]=1.$$

Primeiramente, a partir do limite fundamental envolvendo o número irracional e temos (indeterminação do tipo 1^∞)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Por outro lado, utilizando as propriedades do logaritmo podemos escrever

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)\right]=\lim_{x\to 0}[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}].$$

Uma vez que a função $\ln z$ é contínua para $z>0$ podemos trocar a ordem do limite com o logaritmo a fim de escrever

$$\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln e=1$$

que é o resultado desejado.

7.6 Continuidade e descontinuidade

Vamos, agora, introduzir o importante conceito de continuidade de uma função, conceito este de fundamental importância para a sequência do livro, em particular na construção de gráficos, que serão abordados após o conceito de derivada.

DEFINIÇÃO 7.6.1. DEFINIÇÃO

Uma função $f(x)$ é contínua em $x = a$ se o limite da função, quando x tende a a, é igual ao valor da função em $x = a$

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Se esta condição não é satisfeita, a função é dita descontínua em $x = a$.

Note que nesta definição, pressupõe-se que a função esteja definida em $x = a$. Se isto não acontece, ainda assim, é possível torná-la contínua conforme o teorema a seguir.

TEOREMA 7.6.1. CONTINUIDADE

Se $f(x)$ não está definida em $x = a$ e se

$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

então $f(x)$ será contínua em $x = a$ se, e somente se, o valor A for atribuído a $f(x)$ em $x = a$.

EXEMPLO 7.16. CONTINUIDADE E DESCONTINUIDADE

a) Mostre que a função

$$f(x) = \frac{x^3 - 27}{x - 3}$$

tem um ponto de descontinuidade em $x = 3$ e b) Admita que $f(3) = 27$, a fim de justificar que a função, neste caso, é contínua.

a) Note que a função não está definida no ponto $x = 3$ e temos uma indeterminação, nesse ponto, do tipo zero dividido por zero. Fatorando o numerador como uma diferença de dois cubos, podemos escrever, já tomando o limite

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x^2+6x+9)}{x-3}$$

que simplificado (note que x não é três) fornece

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} = \lim_{x\to 3}(x^2+6x+9).$$

A indeterminação foi levantada, logo, substituindo $x = 3$, na anterior, obtemos

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} = 27$$

que é o resultado desejado. Novamente, esse não é o valor da função no ponto e sim o limite da função quando $x \to 3$.

b) Embora a função não esteja definida no ponto $x = 3$, ao fornecermos o valor $f(3) = 27$, ela se torna contínua para este valor, pois o limite, como calculado no item anterior, tem exatamente esse valor. Logo, visto que

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} = 27 = f(3)$$

isto é, o valor do limite é igual ao valor da função o que a torna contínua.

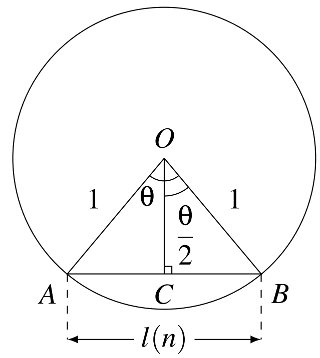


Figura 7.3: Triângulo iscósceles com ângulo (central) θ.

EXEMPLO 7.17. PERÍMETRO E ÁREA DE UM POLÍONO REGULAR DE n LADOS

Um polígono regular de n lados, com $n = 3,4,5,\ldots$, inscrito num círculo de raio unitário, pode ser obtido a partir de n triângulos isósceles cujo ângulo (ângulo central) entre esses lados é $2\pi/n = \theta$, conforme Figura 7.3.

O perímetro do polígono, denotado por $p(n)$, é dado pelo produto de n, o número de lados do polígono regular, por $l(n)$, o lado do triângulo, oposto ao ângulo θ, logo $p(n) = n\,l(n)$. Por outro lado, a área do polígono, denotada por $A(n)$, é a soma das áreas dos n triângulos isósceles. A área do triângulo isósceles, conforme Figura 7.3, é dada pelo semiproduto dos lados iguais e o seno do ângulo por eles formado. Diante disso, podemos escrever para o perímetro e para a área do polígono regular de n lados, respectivamente

$$p(n) = 2n\,\mathrm{sen}(\pi/n) \qquad \text{e} \qquad A(n) = (n/2)\,\mathrm{sen}(2\pi/n)\cdot$$

Denotemos por $\Lambda(n)$ o quociente do perímetro pela área, logo

$$\Lambda(n) = \frac{p(n)}{A(n)} = \frac{2n\,\mathrm{sen}(\pi/n)}{(n/2)\,\mathrm{sen}(2\pi/n)} = 2\sec(\pi/n)$$

onde, na última passagem, utilizamos a expressão para o arco dobro. A expressão anterior vale para $n = 3,4,5,\ldots$ triângulo, quadrado, pentágono, ...

Então, a fim de nos certificarmos que o quociente $\Lambda(n)$ se aproxima de dois para o número de lados aumentando, vamos construir uma tabela

n	3	4	5	6	$\cdots$	20	$\cdots$	60	$\cdots$	90	$\cdots$
$\sec(\pi/n)$	2	1,41	1,24	1,15	$\cdots$	1,01	$\cdots$	1,00	$\cdots$	1,00	$\cdots$
$\Lambda(n)$	4	2,82	2,48	2,30	$\cdots$	2,02	$\cdots$	2,00	$\cdots$	2,00	$\cdots$

Da tabela, fica claro que quando o número de lados é maior que vinte, o valor de $\Lambda(n)$ se aproxima de dois. Então, tomando o limite

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\cos(\pi/n)} = \frac{2}{1} = 2$$

o que confirma, no limite, um círculo de comprimento 2π, unidades de comprimento e área π, unidades de área, cujo quociente $\Lambda(n \to \infty)$ é igual a dois. Enfim, de modo que tenhamos $\Lambda(n) = 1$, devemos ter um círculo de raio 2.

7.7 Exercícios

1. Expresse as frações como frações parciais.

a) $\dfrac{2x+3}{x^3-1}$ b) $\dfrac{x-3}{2x^3+x^2-2x-1}$

c) $\dfrac{x^2}{(2x-1)^3}$ d) $\dfrac{2x^5-3x^3-2x+5}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$

e) $\dfrac{2x^2+3}{2x^4+x^3-2x^2-x}$ f) $\dfrac{2x+5}{x^2(x^2-1)}$

2. Utilize a definição de limite para mostrar que

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-9}{x-3}\right)=6.$$

3. Prove que

$$\lim_{x\to -1}\left(\frac{2x^2-1}{x+3}\right)=\frac{1}{2}.$$

4. Calcule os limites, se existirem,

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4x^3+2x^2-15x+1}{-1+15x-2x^2-x^3}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{4x^3+2x^2-15x+1}{-1+15x-2x^2-x^3}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x^2+12}{1+x^4}\right)$ d) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^4+1}{3x^2+12}\right)$

5. Sejam as funções $f_1(x)=ax^2+bx+c$ com $a,b,c\in\mathbb{R}$ e $f_2(x)=1/x$ com $x\neq 0$. Calcule os seguintes limites, para $i=1,2$

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f_i(x+h)-f_i(x)}{h}\right].$$

6. Calcular os limites, se existirem,

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-1}{-1+x}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to 12}\left(\dfrac{x^2}{x^2-144}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{x+1}{-1+x^2}\right)$ g) $\lim\limits_{x\to -a}\left(\dfrac{x+a}{x^3+a^3}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^5+3x^3+12}{1+2x+x^6}\right)$ h) $\lim\limits_{x\to 0}(x^{20}+13x+1)$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+2x+x^6}{x^4+2x+1}\right)$ i) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^{20}+13x+1}{-1+13x+x^7}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{x^2+x-6}{x+3}\right)$ j) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^{11}+11x+11}{x^{11}+12x+13}\right)$

7. Calcule os limites, se existirem

$$\text{a)} \quad \lim_{h\to 0}\left[\frac{(x+h)^4-x^4}{h}\right] \qquad \text{c)} \quad \lim_{x\to 0}\left[\frac{(t+x)^3-t^3}{x}\right]$$

$$\text{b)} \quad \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\right) \qquad \text{d)} \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\right)$$

8. Mostre que

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\operatorname{sen} x}{x^3}\right)=\frac{1}{2} \qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x^2\csc x}\right)=1$$

9. Determine os pontos de descontinuidade para a função

$$y(x)=\frac{x-2}{x(x-1)(x^2-4)}$$

admitindo que: a) $y(2)=1/8$ e b) $y(2)=1/4$.

10. Calcule os limites, se existirem,

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right) \qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right)$$

11. Calcule os limites, se existirem,

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to 1}\left(\frac{|x-1|}{x^2-1}\right) \qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to \infty}\left(\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\right)$$

12. a) Esboce o gráfico, $y(x)\times x$ para $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x-2}$. b) Calcule, se existirem, os limites

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to 2+0} f(x), \qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to 2-0} f(x), \qquad \text{c)} \quad \lim_{x\to 2} f(x)$$

13. Considere a lei horária

$$s(t)=\frac{a}{2}t^2+v_0t+s_0$$

associada ao movimento retilíneo uniformemente variado, sendo a, v_0 e s_0 constantes. Calcule o limite

$$\xi(t)\equiv\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{s(t+\varepsilon)-s(t)}{\varepsilon}\right].$$

Interprete o resultado.

14. Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{4x^3+2x^2-15x+1}{-1+15x-2x^2-x^3}\right)$ b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2+12}{1+x^4}\right)$

c) $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^4+1}{3x^2+12}\right)$ d) $\lim_{x\to-3}\left(\dfrac{x^2+x-6}{x+3}\right)$

e) $\lim_{h\to 0}\left(\dfrac{(x+h)^4-x^4}{h}\right)$ f) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{3x}{\text{sen } 5x}\right)$

g) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$ h) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{x+1}$

i) $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^x$ j) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{\text{sen}\, x}$.

15. Considere a função

$$f(x)=\begin{cases} x+4 & \text{se} \quad x<-2\\ -x & \text{se} \quad -2<x<1\\ x^2-2x+1 & \text{se} \quad 1<x<3\\ 10-2x & \text{se} \quad x>3.\end{cases}$$

a) É possível definir f, em $x=-2$, de modo que ela seja contínua neste ponto? Se sim, qual o valor de $f(-2)$? b) É possível definir f, em $x=1$, de modo que ela seja contínua neste ponto? Se sim, qual o valor de $f(1)$? c) É possível definir f, em $x=3$, de modo que ela seja contínua neste ponto? Se sim, qual o valor de $f(3)$?

16. Sejam as funções $f_1(x)=ax^2+bx+c$ com $a,b,c\in\mathbb{R}$ e $f_2(x)=1/x$ com $x\neq 0$. Calcule os seguintes limites

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f_i(x+h)-f_i(x)}{h}\right]$$

com $i=1,2$.

17. Considere a função $h(x)$ definida por

$$h(x)=\begin{cases} 4-x^2 & \text{se} \quad x\leq 1\\ 2+x^2 & \text{se} \quad x>1\end{cases}$$

a) Faça um esboço do gráfico de $h(x)\times x$. b) Determine cada um dos seguintes limites, se existirem: $\lim_{x\to 1^-} h(x)$, $\lim_{x\to 1^+} h(x)$ e $\lim_{x\to 1} h(x)$.

18. Encontre os valores de a e b que tornam a função

$$f(x)=\begin{cases} be^x+a+1 & \text{se} \quad x\leq 0\\ ax^2+b(x+3) & \text{se} \quad 0<x\leq 1\\ a\cos(\pi x)+7bx & \text{se} \quad x>1\end{cases}$$

contínua para todo x real.

19. Encontre os valores de a e b para que as seguintes funções sejam contínuas em qualquer intervalo. Esboce o gráfico das funções resultantes.

(a) $f(x) = \begin{cases} 3x+6a & \text{se} \quad x < -3 \\ 3ax-7b & \text{se} \quad -3 \leq x \leq 3 \\ x-12b & \text{se} \quad x > 3 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{se} \quad x \leq 3 \\ ax+b & \text{se} \quad 3 < x < 5 \\ x^2+2 & \text{se} \quad x \geq 5. \end{cases}$

20. Calcule os seguintes limites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 3}(x^2+7x-5)$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 1}(4x^2-13x+12)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{x^3+2x+3}{x^2+5}}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\sqrt[3]{\frac{x}{-7x+1}}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}$ f) $\displaystyle\lim_{x\to 7}\frac{x^2-49}{x-7}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ h) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

i) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2+t}\right)$ j) $\displaystyle\lim_{x\to -4}\left(\frac{5}{x^2+3x-4}+\frac{1}{x+4}\right)$

k) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{3x^2+3}{5x^2+7x-39}$ l) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{4x^3+2x^2-5}{8x^3+x+2}$

21. Calcule os seguintes limites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } 3x}{\text{sen } 4x}$ f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2\tan^2 x}{x^2}$ h) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{2x}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+5}$ j) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}(2+2x)^{\frac{2}{x}}$

22. Seja a função

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{se} \quad x>1 \\ x+3 & \text{se} \quad x<1 \end{cases}$$

e $f(1)=2$. a) Esboce o gráfico de $f(x)\times x$. b) Calcule o limite, se existir, de $f(x)$ quando $x\to 1^+$, $x\to 1^-$ e $x\to 1$.

23. Dada a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2-9 & \text{se} \quad x\neq -3 \\ 4 & \text{se} \quad x=-3 \end{cases}$$

a) Obtenha $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ e mostre que $\lim\limits_{x\to -3} f(x) \neq f(-3)$. (b) Faça um esboço do gráfico de $f(x)\times x$.

24. Investigue a continuidade nos pontos indicados

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & \text{se} \quad x\neq 0, \\ 0 & \text{se} \quad x=0, \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{se} \quad x\geq -1, \\ -x+1 & \text{se} \quad x<-1. \end{cases}$

25. Encontre os valores de a e b para que a função

$$f(x) = \begin{cases} 3ax-b & \text{se} \quad x<1 \\ 5 & \text{se} \quad x=1 \\ 2a\sqrt{x}+b & \text{se} \quad x>1 \end{cases}$$

seja contínua em $x=1$.

26. Encontre os valores de k para que as seguintes funções sejam contínuas em qualquer intervalo.

a) $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{se} \quad x\leq 2, \\ kx^2-6 & \text{se} \quad x>2, \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 3x+7 & \text{se} \quad x\leq 4, \\ kx-1 & \text{se} \quad x>4. \end{cases}$

27. Escreva a fração racional $\dfrac{2x+1}{(x+1)^4}$ em termos de frações parciais.

28. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x\,\text{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x=0. \end{cases}$$

a) Calcule o limite $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. b) Justifique que $f(x)$ é uma função contínua em $x=0$.

29. Calcule o limite

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+4}{x^2-5x+6}.$$

30. Verifique se a função

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & 3\leq x<5 \\ 31-x^2 & 5\leq x\leq 8 \end{cases}$$

é contínua no intervalo $[3,8]$.

31. Mostre que o limite da função $f(x) = \arctan(1/x)$, quando $x \to 0$ não existe.

32. Determine o limite das sucessões quando $n \to \infty$

$$\text{a)} \quad \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n} \qquad \text{e} \qquad \text{b)} \quad \frac{(2n+1)(3n+2)(4n+3)}{n^3}.$$

33. Calcular o limite $\lim\limits_{n \to \infty} (\sqrt{n+2018} - \sqrt{n})$.

34. Calcule, se existirem, os limites

$$\text{a)} \quad \lim_{x \to -1} \frac{x^2+1}{x^3+1} \qquad \text{e} \qquad \text{b)} \quad \lim_{x \to -1} \frac{x^3+1}{x^2+1}.$$

35. Sejam $a, b \neq 0$. Calcule os limites

$$\text{a)} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} bx}{\operatorname{sen} ax} \qquad \text{e} \qquad \text{b)} \quad \lim_{x \to 1} \frac{\operatorname{sen}[b(x-1)]}{\operatorname{sen}[a(x-1)]}.$$

36. Calcule os limites

$$\text{a)} \quad \lim_{x \to 1} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 1}{x-1} \qquad \text{e} \qquad \text{b)} \quad \lim_{x \to 1} \frac{\cos x - \cos 1}{x-1}.$$

37. Seja $a \neq 0$. Calcule, se existir, o limite $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen} ax}{x} \right)^{x+2018}$.

38. Mostre que $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x-1}{x+1} \right)^x = \dfrac{1}{e^2}$.

39. Seja $x \geq 0$. Discutir o limite $\Lambda(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x}{1+x^n}$.

40. Seja $a > 0$. Determine os limites laterais

$$\text{a)} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{|\operatorname{sen} ax|}{x} \qquad \text{e} \qquad \text{b)} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{|\operatorname{sen} ax|}{x}.$$

41. Mostre que $x = -1$ é uma descontinuidade evitável (também chamada, removível) e $x = 2$ é uma descontinuidade da função

$$f(x) = \frac{x^3+1}{(x+1)(x-2)}.$$

42. Mostre que $\lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \dfrac{1}{e}$.

43. Mostre que $\lim\limits_{x \to 0} x^x = 1$.

44. Mostre que $\lim\limits_{x \to \infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$.

45. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-16}{x-4} & \text{para} \quad x \neq 4 \\ \\ 8 & \text{para} \quad x = 4. \end{cases}$$

Justifique se a função é contínua no ponto $x = 4$.

46. Calcule, se exisitir, o limite $\lim_{x\to 1} \sqrt{x^2-1}$ e justifique se a função $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ é contínua.

47. Calcule, se existirem, os limites

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)^2}{\operatorname{sen}^2(x-3)} \qquad \text{e} \qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{\ln x}.$$

48. Calcule, se existirem, os limites

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{(x-1)\operatorname{sen}^2 x}{x^2 \operatorname{sen}(x-1)} \qquad \text{e} \qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to \infty} \frac{2019x^3+x^2+x+2018}{x^3}.$$

49. Calcule, se existirem, os limites

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to 0} \left(2+\frac{1}{x}\right)^x \qquad \text{e} \qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to \infty} (2+x)^{\frac{1}{x}}.$$

50. Determine $a \in \mathbb{R}$ a fim de que o limite

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{a-\cos x}$$

exista.

51. Calcule, se existirem, os limites

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{senh} x}{x}, \qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\tanh x}{x}, \qquad \text{c)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cosh x}.$$

52. Calcule, se existirem, os limites

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\operatorname{senh} 3x} \qquad \text{e} \qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to 12} \frac{27\operatorname{senh}(13-x)}{15+x}.$$

53. Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$ com $n = 1,2,3,\ldots$. Calcule o limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

54. Calcule o limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{8+x}-\sqrt{10-x}}{x-1}.$$

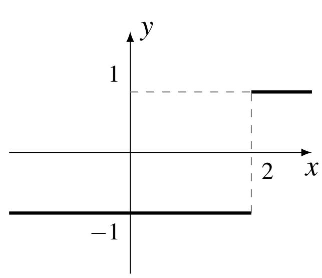
55. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x} & \text{para} \quad x \neq 0 \\ \\ a & \text{para} \quad x = 0. \end{cases}$$

Determine $a \in \mathbb{R}$ a fim de que $f(x)$ seja uma função contínua.

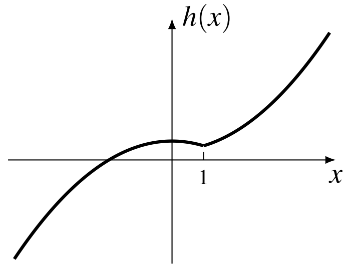
7.7.1 Respostas e/ou sugestões

1. a) $\dfrac{5/3}{x-1}-\dfrac{5/3x+4/3}{x^2+x+1}$, b) $-\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{1/3}{x-1}+\dfrac{14/3}{2x+1}$,
   c) $\dfrac{1/4}{2x-1}+\dfrac{1/2}{(2x-1)^2}+\dfrac{1/4}{(2x-1)^3}$, d) $\dfrac{15/4}{x+1}+\dfrac{2}{(x+1)^2}-\dfrac{7/4x+9/4}{x^2+1}-\dfrac{5/2x-3/2}{(x^2+1)^2}$,
   e) $-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5/6}{x-1}-\dfrac{5/2}{x+1}+\dfrac{28/3}{2x+1}$, f) $-\dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{3/2}{x-1}+\dfrac{7/2}{x+1}$.
2. Note que, nem sempre a definição é o melhor caminho para calcular um particular limite [7].
3. Visto que o denominador não se anula, basta substituir diretamente.
4. a) -4, b) $-\infty$, c) 0, d) $+\infty$.
5. a) $2ax+b$, b) $-1/x^2$.
6. a) 2, b) $-1/2$, c) 0, d) 1, e) -5, f) ∞, g) $1/3a^2$, h) 1, i) ∞, j) 1.
7. a) $4x^3$, b) $1/2\sqrt{x}$, c) $3t^2$, d) $1/2$.
8. a) Escreva a tangente em função de seno e cosseno, multiplique numerador e denominador pelo conjugado do numerador e o limite fundamental trigonométrico. b) Expresse a cossecante em função do seno e use o limite fundamental trigonométrico.
9. a) $x=0$, $x=1$ e $x=-2$, b) $x=0$, $x=1$, $x=-2$ e $x=2$.
10. a) 1, b) 1.
11. a) $\nexists$, b) 1.
12. a) Esboço do gráfico.

    b) 1, -1, $\nexists$.
13. $\xi(t)=v_0+at$. Expressão de como varia a velocidade nesse movimento.
14. a) -1, b) zero, c) ∞, d) -5, e) $4x^3$, f) $3/5$, g) e^2, h) $\sqrt{e}$, i) e, j) 1.
15. a) Contínua se $f(-2)=2$, b) Descontínua em $x=1$, c) Contínua se $f(3)=4$.
16. Para $i=1$ temos $2ax+b$ e para $i=2$ temos $-1/x^2$ com $x\neq 0$.

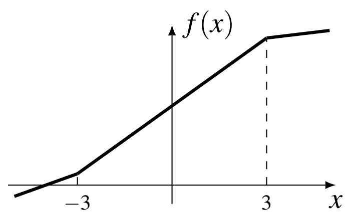
17. a) Esboço do gráfico.



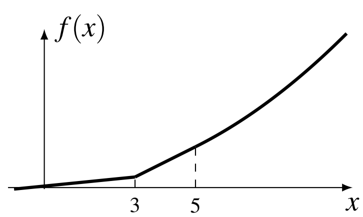
b) Limite à esquerda é igual ao limite à direita, logo $\lim_{x\to 1} h(x) = 3$.

18. $a = 3$ e $b = 2$.

19. a) $a = 2$ e $b = -3$, esboço gráfico.



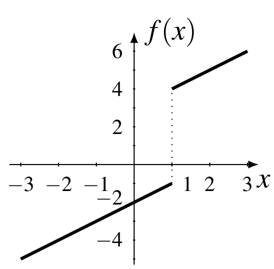
b) $a = 10$ e $b = -23$, esboço gráfico.



20. a) 25; b) 3; c) $\sqrt{15}/3$; d) $-\sqrt[3]{4}/3$; e) 10; f) 14; g) $1/4$; h) $1/2$; i) 1; j) $-1/5$; k) $3/5$; l) $1/2$.

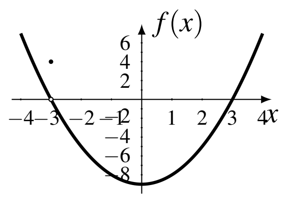
21. a) $3\sqrt{2}/2$; b) 1; c) $-3\sqrt{2}/2$; d) -1; e) $3/4$; f) 0; g)2; h) $1/2$; i) e; j) e^2.

22. a) Esboço do gráfico.



b) Limites laterais são diferentes, não existe limite no ponto $x = 1$.

23. a) Limites laterais existem e diferentes do valor da função; b) Esboço do gráfico.



24. a) Descontínua e b) Contínua.

25. $a = 2$ e $b = 1$.

26. a) $k = 3$ e b) $k = 5$.

27. $\dfrac{2}{(x+1)^3} - \dfrac{1}{(x+1)^4}$.

28. a) Zero. b) É contínua, pois o valor da função é igual ao valor do limite no ponto.

29. Zero.

30. A função é contínua.

31. Verifique que os limites laterais são diferentes.

32. a) 3 e b) 24.

33. Zero.

34. a) $\nexists$ e b) Zero.

35. a) b/a e b) b/a.

36. a) $\cos 1$ e b) $-\operatorname{sen} 1$.

37. a^{2018}.

38. Utilize a propriedade de que o limite do quociente é o quociente dos limites, bem como o limite fundamental (exponencial).

39. $\Lambda(x) = 0$ se $x > 1$; $\Lambda(x) = 1/2$ se $x = 1$ e $\Lambda(x) = x$ se $0 \leq x < 1$.

40. a) $-a$ e b) a.

41. Fatore o numerador e calcule os limites.

42. Efetue uma mudança de variável $x = t + 1$ e use o limite fundamental (exponencial).

43. Chame $x^x = y$ e tome o logaritmo.

44. Efetue uma mudança de variável $x = 1/t$ e use o anterior.

45. Sim, é contínua.

46. O limite não existe e a função não é contínua.

47. a) 1; b) 0.

48. a) $\csc 1$; b) 2019.

49. a) $\sqrt{e}$; b) $\sqrt{e}$.

50. Se $a \neq 1$, $L = 0$ e se $a = 1$, $L = 2$.

51. a) 1; b) 1; c) -2.

52. a) $2/3$ e b) $\operatorname{senh} 1$.

53. x^{n-1}.

54. $1/3$.

55. 2.

Capítulo 8

Derivadas

Utilize o princípio de Fermat para obter a lei da refração de Snell.

Vamos usar o problema da queda livre, no vácuo e no ar, para motivar o estudo e a importância de se introduzir o conceito de derivada que, como já mencionamos, desempenha papel crucial em várias áreas do conhecimento, em particular, sempre que tivermos um específico limite de uma razão.

Como é sabido, um corpo abandonado no vácuo cai com velocidade $v = v_0 + gt$ sendo v_0 a velocidade inicial e g a aceleração gravitacional. Essa expressão leva em consideração unicamente a chamada força da gravidade, denotada por $P = mg$, sendo m a massa do corpo.

É imediata uma pergunta. E se, agora, quisermos discutir o que acontece com a queda de um corpo no ar e não no vácuo? O problema requer um outro tipo de força, além da força gravitacional, contrária ao movimento, a chamada resistência do ar, admitindo, para simplificar, que o ar não se move. Ainda mais, vamos admitir que a grandeza da força de resistência do ar é proporcional a sua velocidade (se a velocidade é muito grande, pode-se admitir proporcional ao quadrado da velocidade).

Então, sendo b, dependendo das dimensões e da forma do corpo, a constante de proporcionalidade, podemos escrever $F_R = -bv$, onde o sinal negativo indica o sentido contrário da velocidade. Utilizando a segunda lei de Newton, podemos escrever $mg - bv = ma$ onde a é a aceleração que o corpo sofre. Orientando o sentido do eixo para baixo de modo que a aceleração seja positiva nesse sentido e negativa caso contrário, podemos escrever, já explicitando a aceleração,

$$a = -\frac{b}{m}\left(v - \frac{mg}{b}\right).$$

Essa equação representa como estão relacionadas a velocidade e a aceleração do movimento de queda de um corpo no ar, isto é, levando em conta as forças gravitacional e resistência do ar.

Lembremos que a velocidade média é a razão da variação do espaço, Δs, no intervalo de tempo, Δt, enquanto a velocidade instantânea é o limite dessa razão quando $\Delta t \to 0$. Esse limite, como já mencionado no Capítulo 7, é a derivada, isto é,

$$v \equiv \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

entendido como a derivada $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ do caminho percorrido pelo tempo.

Em completa analogia à velocidade, a razão $[v(t+\Delta t) - v(t)]/\Delta t$ é a aceleração média no intervalo de tempo, entre os instantes final e inicial. Aqui, também, o limite $\Delta t \to 0$ dessa razão define a aceleração no instante t,

$$a \equiv \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}.$$

Voltemos às duas expressões para as forças, no vácuo e no ar. Podemos reescrevê-las, respectivamente, como

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g \qquad \text{e} \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{b}{m}\left(v - \frac{mg}{b}\right)$$

chamadas equações diferenciais ordinárias. Note que, se considerarmos $b = 0$, isto é, sem a resistência do ar, a segunda equação se reduz na primeira.

O estudo desse tipo de equação foge ao escopo do presente texto, porém julgamos conveniente a menção a fim de motivar o uso da derivada, conceito este que será o tema deste capítulo. Convém ressaltar que esse tipo de equação emerge naturalmente, em completa analogia ao problema da queda livre, no estudo de circuitos elétricos, envolvendo os elementos resistência e indutância. Enfim, como uma outra aplicação das equações diferenciais, isto é, equações envolvendo o conceito de derivada, é no estudo da desintegração radioativa que, em particular, é usada para problemas de datação.

Em resumo, como o conceito de derivada já foi mencionado como um particular cálculo de limite, vamos, após essa motivação, discutir propriedades e aplicações, em particular vamos verificar as respectivas soluções das equações relativas ao movimento de queda, tanto no vácuo, quanto no ar. Vamos mostrar que

$$v = v_0 + gt \qquad \text{e} \qquad v = \frac{mg}{b} + \left(v_0 - \frac{mg}{b}\right) e^{-bt/m}.$$

são as soluções das respectivas equações diferenciais [8, 9].

8.1 Taxas de variação $\times$ crescimento de uma função

Nesta seção, vamos formalizar os conceitos de taxas de variação média e instantânea e seus correspondentes, isto é, crescimentos médio e instantâneo de uma função.

DEFINIÇÃO 8.1.1. TAXA DE VARIAÇÃO MÉDIA

Chama-se taxa de variação média a quantidade de crescimento durante o intervalo dividido pelo número de unidades no intervalo.

DEFINIÇÃO 8.1.2. CRESCIMENTO DE UMA FUNÇÃO NUM INTERVALO.

Chama-se crescimento de uma função num intervalo, a quantidade de crescimento no valor da função (variável dependente) durante o intervalo, dividido pelo valor do crescimento no valor da variável independente durante esse intervalo.

Consideremos $y = f(x)$ uma função da variável independente x. Fazendo x crescer, incrementamos x de Δx, a função sofre um correspondente crescimento de Δy, logo $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$. Isolando Δy, isto é, subtraindo a função incrementada da função, obtemos o crescimento da função $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Com isso, relacionamos com a taxa de variação média, simplesmente dividindo Δy por Δx. Logo, podemos escrever

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

que é a taxa média de crescimento da variável y em relação à variável x no intervalo de x até $x + \Delta x$.

Passemos agora à taxa de variação instantânea e o crescimento (decrescimento) de uma função. Sabendo que a inclinção de uma linha reta está associada à medida da taxa de variação de uma função representada pela linha, então a inclinação de uma linha tangente pode ser associada à medida da taxa instantânea de crescimento da função no particular ponto. Note que a linha tangente indica a mudança ou o crescimento (decrescimento) no intervalo, se o crescimento (decrescimento) continuar, ao longo do intervalo, como no início do intervalo.

Enfim, antes de apresentarmos o conceito formal de derivada, vamos, através de um gráfico, conforme Figura 8.1, mostrar que a taxa de variação média se aproxima da taxa instantânea como um limite, quando o intervalo se aproxima de zero.

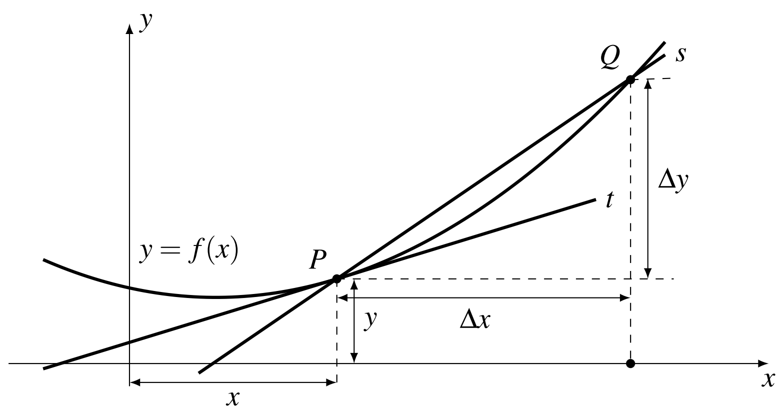


Figura 8.1: Taxa média $\times$ taxa instantânea.

A reta secante, s, passando pelos pontos P e Q tem inclinação $\Delta y/\Delta x$, representando a taxa de variação média da função y associada ao intervalo Δx, isto é, para Δx dado temos o correspondente Δy. Quando Δx se aproxima do valor zero, o ponto Q se aproxima do ponto P e a reta secante, s, gira em torno do ponto limite P, que é a reta tangente, t, à curva $y = f(x)$ no ponto P. Com isso, a reta tangente é exatamente a posição limite da reta secante quando $\Delta x \to 0$. Ainda mais, a inclinação da reta tangente, t, é a medida exata do limite da razão $\Delta y/\Delta x$ para $\Delta x \to 0$. Em resumo, a inclinação da reta tangente, t, é a taxa instantânea no ponto P.

EXEMPLO 8.1. TAXA DE VARIAÇÃO ASSOCIADA A UMA PARÁBOLA

Seja $x \in \mathbb{R}$. Consideremos a curva $y = x^2 + ax + b$ com $a, b \in \mathbb{R}$. Qual é o crescimento de y em relação a x no ponto x_0?

A variável independente x é incrementada e passa a ser $x + \Delta x$ o que acarreta $y + \Delta y$ de onde podemos escrever para Δy, já mencionado, a partir da diferença, como a seguir

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 + a(x + \Delta x) + b - (x^2 + ax + b)$$

que resulta em $\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + a\Delta x$, que dividido por Δx fornece

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + a + \Delta x.$$

Agora, tomando o limite $\Delta x \to 0$ obtemos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + a$$

que, para $x = x_0$, resulta $2x_0 + a$, ou seja, a taxa instantânea ou crescimento da função representada pela parábola no ponto $x = x_0$ é $2x_0 + a$. Em resumo, a função muda $2x_0 + a$ vezes mais rápido que a variável independente no ponto $x = x_0$, isto é, a inclinação da tangente no ponto $x = x_0$ é $2x_0 + a$.

DEFINIÇÃO 8.1.3. DEFINIÇÃO

Seja $x \in \mathbb{R}$. Define-se derivada da função $y(x)$ em relação à variável x, denotada por y' ou $f'(x)$, através do seguinte limite

$$y' \equiv f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

onde as duas últimas igualdades explicitam outras notações para a derivada.

Assim, a derivada de uma função, $f(x)$, num ponto x_0 é o limite, desde que exista e seja finito, para $x \to x_0$ da taxa de variação média. É a rapidez de variação da função em relação à sua variável independente. Ressalte-se que a derivada calculada num particular ponto é a taxa de variação instantânea.

Do ponto de vista geométrico, podemos visualizar a derivada da função $f(x)$, num ponto x_0 como sendo o coeficiente angular da reta que tangencia o gráfico da função naquele ponto.

Enfim, antes de abordarmos alguns exemplos, é importante destacar que a expressão $\Delta y / \Delta x$ é uma fração, uma vez que tanto numerador quanto denominador são quantidades finitas, porém o símbolo $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ deve ser considerado como um valor limitante de uma fração e, portanto, não deve ser encarado como uma fração no sentido de dividirmos $\mathrm{d}y$ por $\mathrm{d}x$.

EXEMPLO 8.2. DERIVADA PELA DEFINIÇÃO

Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $y = f(x) = -3x^3 + 2x^2 - 1$. Calcular a derivada, utilizando a definição, de $f(x)$ em relação à variável x e calcular a 'derivada da derivada' (dizemos a derivada segunda da variável dependente em relação à variável independente) de $f(x)$ em relação a x.

Começamos por calcular a taxa de variação média, isto é, o quociente da diferença da função incrementada menos a função pelo incremento. Seja, para simplificar, $\Delta x = h$. Temos, então,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{-3(x+h)^3 + 2(x+h)^2 - 1 - (-3x^3 + 2x^2 - 1)}{h}$$

que, já simplificando, fornece

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -9x^2 - 9xh - 3h^2 + 4x + h.$$

Agora, tomando o limite $h \to 0$ obtemos a derivada de $y(x)$ em função de x

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y(x) = f'(x) = \lim_{h \to 0} (-9x^2 - 9xh - 3h^2 + 4x + h) = -9x^2 + 4x.$$

A fim de calcular a derivada segunda, denotada por $f''(x) = y''(x) = \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} y(x)$, procedemos exatamente como na derivada primeira, isto é, consideramos a função $f(x) = -9x^2 + 4x$. Efetuando os mesmo cálculos, após simplificar, obtemos

$$f''(x) = y''(x) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} y(x) = -18x + 4.$$

EXEMPLO 8.3. DERIVADA DA FUNÇÃO SENO

Utilize a definição para mostrar que a derivada da função $f(x) = \operatorname{sen} x$ em relação a x é a função $f'(x) = \cos x$.

Em analogia ao anterior, vamos calcular a taxa de variação média,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x}{h}.$$

Utilizando a expressão que fornece o seno da soma, conforme Capítulo 3, e rearranjando, podemos escrever

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\operatorname{sen} x\cos h+\operatorname{sen} h\cos x-\operatorname{sen} x}{h}\\ &= \cos x\left(\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right)+\operatorname{sen} x\left(\frac{\cos h-1}{h}\right).\end{aligned}$$

A fim de obter a derivada, tomamos o limite $h \to 0$, logo

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \cos x\lim_{h\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right)+\operatorname{sen} x\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos h-1}{h}\right).$$

O primeiro limite à esquerda no segundo membro nada mais é que o limite fundamental trigonométrico que vale um, enquanto para o segundo, mutiplicamos e dividimos por $\cos h+1$, logo, já denotando por f', temos

$$f'(x) = \cos x+\operatorname{sen} x\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos h-1}{h}\cdot\frac{\cos h+1}{\cos h+1}\right).$$

Utilizando a relação fundamental da trigonometria, podemos escrever

$$f'(x) = \cos x+\operatorname{sen} x\lim_{h\to 0}\left(\frac{-\operatorname{sen}^2 h}{h}\right) = \cos x-\operatorname{sen} x\lim_{h\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right)\cdot\lim_{h\to 0}\operatorname{sen} h,$$

onde, na última passagem, utilizamos a propriedade dos limites envolvendo o produto. Mais uma vez, utilizando o limite fundamental trigonométrico e sabendo que $\operatorname{sen} 0 = 0$ obtemos, finalmente, a derivada da função seno,

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{sen} x = \cos x.$$

Assim como no Capítulo 7, apresentamos propriedades envolvendo os limites vamos, aqui, apresentar propriedades envolvendo a derivada a fim de, logo após, apresentarmos o cálculo explícito de derivadas sem, entretanto, fazer uso da definição. Ou seja, através de algumas propriedades, todas elas demonstradas através da definição, simplificamos o cálculo de uma particular derivada.

Antes de passarmos ao cálculo explícito de algumas derivadas bem como de aplicações, vamos apresentar propriedades a fim de simplificar futuros cálculos. Todas estas propriedades podem ser mostradas através da definição de derivada.

PROPRIEDADE 8.1.1. A DERIVADA DE UMA CONSTANTE É ZERO

Seja C uma constante. Temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}C = 0.$$

Propriedade 8.1.2. A derivada do produto de uma constante por uma função é o produto da constante pela derivada da função

Sejam a constante $A \in \mathbb{R}$ e $f(x)$ uma função real que admite derivada. Temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} A\, f(x) = A \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x).$$

Propriedade 8.1.3. A derivada da soma (subtração) é a soma (subtração) das derivadas

Sejam as constantes $A, B \in \mathbb{R}$. Sejam $f_1(x)$ e $f_2(x)$ duas funções reais que admitem derivada. Temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[A\, f_1(x) \pm B\, f_2(x)] = A \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_1(x) \pm B \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_2(x).$$

Propriedade 8.1.4. Derivada do produto de duas funções

Sejam $u = u(x)$ e $v = v(x)$ duas funções que admitem derivada as quais vamos denotar, respectivamente, por u' e v'. A derivada do produto é dada pela expressão (regra do produto)

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Propriedade 8.1.5. Derivada do quociente de duas funções

A derivada do quociente de duas funções u e v com $v \neq 0$ é dada pela expressão (regra do quociente)

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Propriedade 8.1.6. Derivada da função $y(x) = x^{\mu}$ com $\mu \in \mathbb{R}$

A derivada da função $y(x) = x^{\mu}$ com $\mu \in \mathbb{R}$ é dada por $y'(x) = \mu x^{\mu-1}$.

Propriedade 8.1.7. Derivada da função logaritmo $y(x) = \ln x$ com $x > 0$

A derivada da função $y(x) = \ln x$ com $x > 0$ é dada por $y'(x) = 1/x$.

Propriedade 8.1.8. Derivada da função exponencial $y(x) = e^x$ com $x \in \mathbb{R}$

A derivada da função $y(x) = e^x$ com $x \in \mathbb{R}$ é $y'(x) = e^x$. Note que, essa é a única função cuja derivada é a própria função.

Passemos, a partir de agora, a apresentar regras para derivar, como propriedades, todas demonstradas a partir da definição de derivada, dentre elas: a função composta, a função apresentada em sua forma paramétrica, a função inversa e a função implícita.

PROPRIEDADE 8.1.9. FUNÇÃO COMPOSTA

Sejam $y = f(\xi)$ e $\xi = g(x)$, isto é, $y = f[g(x)]$ onde as funções y e ξ admitem derivada. A derivada de y em relação a x é dada por

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}$$

conhecida pelo nome de regra da cadeia a qual pode ser estendida para um número finito de funções deriváveis.

EXEMPLO 8.4. UTILIZE A REGRA DA CADEIA PARA MOSTRAR QUE A DERIVADA DA FUNÇÃO $y = (10x+3)^5$ É IGUAL A $y' = 50 \cdot (10x+3)^4$.

Seja $\xi = 10x+3$. Temos, então, $y = \xi^5$. Calculando as derivadas, podemos escrever $\mathrm{d}\xi/\mathrm{d}x = 10$, onde utilizamos que a derivada de uma constante é zero, e $\mathrm{d}y/\mathrm{d}\xi = 5\xi^4$ onde utilizamos a derivada de um monômio elevado a uma potência. A partir da regra da cadeia, escrevemos

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 5\xi^4 \cdot 10 = 50 \cdot (10x+3)^4$$

onde, na última passagem, já voltamos na variável inicial x.

Note que, depois de vários exercícios, o estudante deve fazer uso da regra de maneira mais compacta, em particular, sem ter que explicitar quem são as funções $y(\xi)$ e $\xi(x)$.

EXEMPLO 8.5. UTILIZE A REGRA DA CADEIA PARA MOSTRAR QUE A DERIVADA DA FUNÇÃO $y = \operatorname{sen}^3(5x)$ É IGUAL A $y' = 15 \cdot \operatorname{sen}^2(5x) \cdot \cos(5x)$.

Sejam $y = \xi^3$, $\xi = \operatorname{sen}\eta$ e $\eta = 5x$. Calculando as derivadas temos, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}\xi = 3\xi^2$, derivada de um monômio elevado a uma potência, $\mathrm{d}\xi/\mathrm{d}\eta = \cos\eta$, derivada da função seno é a função cosseno, e $\mathrm{d}\eta/\mathrm{d}x = 5$ de onde segue, utilizando a regra da cadeia e já voltando na variável x, que

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi} \cdot \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\eta} \cdot \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x} = 3\xi^2 \cdot \cos\eta \cdot 5 = 15 \cdot \operatorname{sen}^2(5x) \cdot \cos(5x).$$

DEFINIÇÃO 8.1.4. FORMA PARAMÉTRICA

Se a dependência entre a variável dependente, y, e a variável independente, x, é dada em termos de um parâmetro, t, isto é,

$$x = f(t) \qquad \text{e} \qquad y = g(t)$$

dizemos que a função é dada na forma paramétrica (ou parametrizada).

PROPRIEDADE 8.1.10. DERIVADA NA FORMA PARAMÉTRICA

A derivada de y em relação a x é dada pela expressão

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \bigg/ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,.$$

EXEMPLO 8.6. AS COORDENADAS POLARES NO PLANO

As coordenadas polares no plano, r e θ, estão relacionadas com as coordenadas cartesianas, x e y, através das expressões $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$. Mostre que, para r fixo, temos para a derivada

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\cot\theta.$$

Calculando as derivadas temos $\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta = r\cos\theta$ e $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta = -r\,\mathrm{sen}\,\theta$. Utilizando a expressão para a derivada na forma paramétrica e simplificando, temos

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\cot\theta,$$

que é o resultado desejado.

Note que, quando possível, podemos eliminar o parâmetro a fim de expressar y como função de x e derivar direto. Neste caso é possível pois eliminando o parâmetro θ temos

$$y^2 = r^2 - x^2.$$

Então calculando a derivada de y em relação a x e voltando com as variáveis iniciais obtemos o mesmo resultado, como pode ser verificado.

PROPRIEDADE 8.1.11. FUNÇÃO INVERSA

Considere uma função contínua $y(x)$ cujo domínio seja um intervalo. A derivada da função inversa é o recíproco da derivada da função original

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}.$$

EXEMPLO 8.7. SEJA A FUNÇÃO $y = 4x^3$. MOSTRE QUE A DERIVADA DA SUA INVERSA, CALCULADA NO PONTO $x = 1$, É IGUAL A $1/12$

Primeiramente, calculamos a derivada a função original $y' = 12x^2$, então a derivada da função inversa $\mathrm{d}x/\mathrm{d}y = 1/12x^2$ que, calculada em $x = 1$ é 1/12.

Uma outra maneira é, primeiramente, calcular a função inversa. Então, isolando x obtemos $x = (y/4)^{\frac{1}{3}}$. Derivando em relação a y temos

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{3}(y/4)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{4}$$

que, substituindo $y = 4x^3$ fornece

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{12x^2}$$

que é exatamente o mesmo resultado obtido anteriormente.

PROPRIEDADE 8.1.12. FUNÇÃO IMPLÍCITA. REGRA DOS TRÊS PASSOS

Se a dependência entre y e x vem dada na forma implícita, isto é, $f(x,y) = 0$ a derivada $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ é calculada segundo a regra dos três passos, a saber: **D**erive em relação a x considerando y como função de x; **I**guale esta derivada a zero e **R**esolva a equação resultante para y'.

EXEMPLO 8.8. CASO EM QUE PODEMOS OPTAR POR DUAS MANEIRAS

Considere uma elipse de equação dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

onde a e b são constantes. Mostre que $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = -b^2x/a^2y$. Discuta o caso $a = b$.

Sabendo que a derivada de uma constante é zero, podemos derivar ambos os lados, logo

$$\frac{1}{a^2} \cdot 2x \cdot \mathrm{d}x + \frac{1}{b^2} \cdot 2y \cdot \mathrm{d}y = 0$$

de onde podemos escrever

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$

que, isolando $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ permite escrever

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}$$

que é o resultado desejado. No caso em que $a = b$ obtemos

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}.$$

Aqui também, este resultado pode ser obtido explicitando (neste caso é possível) y em função de x e derivando diretamente. Então, primeiramente, isolamos y como função de x

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Calculando a derivada de y em relação a x temos

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{b}{a}\frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}$$

onde, na última passagem, voltamos com o valor de y. Este é exatamente o mesmo resultado obtido através da regra dos três passos.

Vamos apresentar a chamada regra de l'Hôpital, como uma importante ferramenta para o cálculo de limites indeterminados, dentre eles, $0/0$ ou ∞/∞, isto é, utilizamos a derivada para calcular particulares limites.

8.2 Regra de l'Hôpital

Se a fração $f(x)/g(x)$, num ponto $x = x_0$ (x_0 pode ser, inclusive, ∞), é indeterminada de qualquer uma das formas acima mencionadas, temos

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

desde que exista o limite da fração das derivadas.

Devemos tomar cuidado para não confundir com a regra do quociente, pois lá, estávamos derivando um quociente e, aqui, estamos calculando um limite, em particular, levantando uma indeterminação, com o uso da derivada. A expressão para o cálculo do limite requer apenas a derivada do numerador e a derivada do denominador, pois o quociente dessas duas derivadas é que fornece o valor do limite, desde que tal limite exista.

EXEMPLO 8.9. USANDO A REGRA DE L'HÔPITAL, CALCULE OS LIMITES, DESDE QUE EXISTAM

$$\text{(a)} \qquad \lim_{x\to 0}\left[\frac{\tan(x)}{x}\right] \qquad \text{e} \qquad \text{(b)} \qquad \lim_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen}(2x)}{3x}\right].$$

a) Calculando as derivadas, usando a notação da linha, temos $[\tan(x)]' = \sec^2(x)$ e a derivada de $(x)' = 1$. Logo, calculando o quociente e tomando o limite obtemos

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\tan(x)}{x}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x}{1} = 1.$$

b) Analogamente, usando a regra da cadeia, temos $[\operatorname{sen}(2x)]' = 2\cos(2x)$ e $(3x)' = 3$. Logo, podemos escrever

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen}(2x)}{3x}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos(2x)}{3} = \frac{2}{3}\cdot$$

Aqui, também, podemos multiplicar numerador e denominador por $2x$ e utilizar o fato de que o limite do produto é o produto dos limites, isto é,

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen}(2x)}{3x}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x} = \frac{2}{3}$$

onde utilizamos o limite fundamental trigonométrico, conforme Seção 7.5.1.

8.3 Interpretação geométrica

Note que, já acenamos para a interpretação geométrica da derivada quando introduzimos o conceito de taxa de crescimento. Vamos formalizar a interpretação geométrica da derivada, para tanto, consideramos a Figura 8.2 onde s é a (reta) secante passando pelos pontos P (fixo) e Q; e t é a (reta) tangente no ponto P.

Fazemos Q tender a P, movendo-se sobre a curva, a reta $\overleftrightarrow{PQ}$ vai girar em torno de P e a sua posição limite será a tangente em P. Denotemos a curva $\widehat{AB}$, passando por P e Q, pela função $y = f(x)$. O ponto Q, próximo a $P(x,y)$, pertencente à curva, é tal que $Q(x+\Delta x, y+\Delta y)$.

Vamos determinar a taxa de variação média $(\Delta y/\Delta x)$ e tomar o limite para $\Delta x \to 0$, isto é, calcular a derivada. Vamos esboçar estes passos a seguir, através de uma tabela:

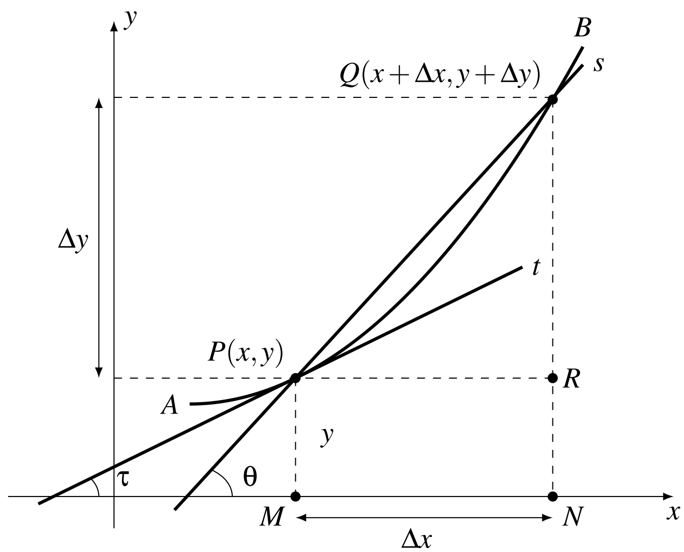


Figura 8.2: A derivada como coeficiente angular da reta tangente.

Linguajar	Matemático	Gráfico
Incremento em x	Δx	$\overline{MN}$
Incremento em y	$y+\Delta y = f(x+\Delta x)$	$\overline{NQ}$
Subtraindo y	$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$	$\overline{RQ}$
Taxa média	$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$	$\dfrac{\overline{RQ}}{\overline{MN}} = \dfrac{\overline{RQ}}{\overline{PR}}$
Tangente	$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\phi$	$\triangleleft R\widehat{P}Q$

A razão entre os acréscimos Δy e Δx é igual ao coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $P(x,y)$ e $Q(x+\Delta x, y+\Delta y)$, reta secante s. Quando Δx varia (tendendo a zero), o ponto Q também varia. Logo, a reta $\overleftrightarrow{PQ}$ varia, rodando em torno de P e aproximadamente da reta tangente, t, à curva no ponto P. Da Figura 8.2 podemos escrever

$$\lim_{\Delta x \to 0} \theta = \tau.$$

Sabendo-se que a função tangente é uma função contínua (exceto para os valores de $x = \frac{\pi}{2} \pm k\pi$ com $k = 0, 1, 2, \ldots$) podemos escrever

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \tan\theta = \tan\tau$$

interpretado como o coeficiente angular da reta tangente em P.

TEOREMA 8.3.1. A DERIVADA COMO COEFICIENTE ANGULAR DA RETA TANGENTE

O valor da derivada na abscissa de um ponto de uma curva é igual ao coeficiente angular da reta tangente à curva nesse ponto.

8.4 Diferenciais

Nesta seção, vamos introduzir o conceito de diferencial, pois se constitui numa importante aplicação, em particular na economia para efetuar aproximações no custo, na receita e no lucro, a chamada análise marginal.

Antes de apresentarmos a definição, lembremos que a derivada de uma função $y(x)$ em relação à variável x foi definida como sendo o limite do quociente Δy por Δx, quando Δx tende a zero e denotada por $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$, porém não interpretamos como um quociente de duas quantidades.

DEFINIÇÃO 8.4.1. DIFERENCIAL

Seja $x \in \mathbb{R}$. Considere $y = f(x)$ uma função que admite derivada. Chama-se diferencial de x qualquer número real distinto de zero, mas é costume considerá-lo um número pequeno de modo que $\mathrm{d}x = \Delta x$.

Logo, a diferencial de y é dada por $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$, onde a linha denota derivada primeira. Note que $\mathrm{d}x$ deve ser distinto de zero, pois com a notação $f'(x) = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ devemos ter $\mathrm{d}x \neq 0$.

EXEMPLO 8.10. NOTAÇÃO

$\mathrm{d}x$ – lê-se: diferencial de x; $\mathrm{d}(x^3+1)$ – lê-se: diferencial de x^3+1; $\mathrm{d}f(x)$ – lê-se: diferencial de $f(x)$; e assim por diante.

DEFINIÇÃO 8.4.2. INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

Considere a Figura 8.3. No triângulo retângulo RPS, a tangente do arco θ é igual ao declive da linha tangente, logo

$$\mathrm{d}y = \tan\theta\,\mathrm{d}x.$$

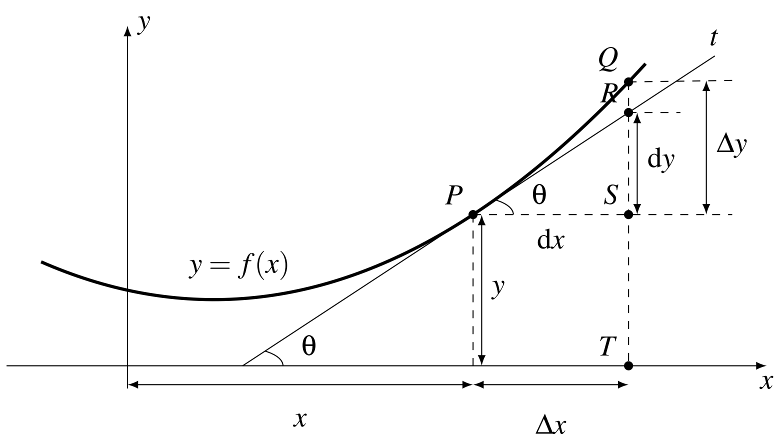


Figura 8.3: Diferencial. Interpretação geométrica.

Por definição, o declive da linha tangente em qualquer ponto é igual ao valor da derivada no ponto. Podemos escrever

$$\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

que é o diferencial da função. Visto que $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ é a derivada primeira de y em relação a x (não é uma fração) temos $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$, ou ainda

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x).$$

Agora, sim, o lado esquerdo dessa igualdade é a fração que representa o quociente de duas diferenciais. Essa relação permite alternar a nomenclatura, isto é, a derivada primeira e o quociente das diferenciais representando a mesma relação.

Ainda mais, a partir da Figura 8.3, próximo ao ponto de tangência, $P(x,y)$, o gráfico $y = f(x)$ está tão próximo quanto se queira da reta tangente. Disto, segue que, perto do ponto de tangência $\mathrm{d}y \simeq \Delta y$.

O exemplo mais simples para efetuarmos a comparação entre Δy (variação) e $\mathrm{d}y$ (diferencial) é uma parábola. Note que, para uma reta a diferença não existe, pois $\mathrm{d}y = \Delta y$.

EXEMPLO 8.11. VARIAÇÃO $\times$ DIFERENCIAL

Sejam $x \in \mathbb{R}^*$ e a função $y = f(x) = x^2$. a) Determine a derivada de y em relação a x; b) Para $x = 1$ e $\mathrm{d}x = 0,1$, determine o diferencial, $\mathrm{d}y$; c) Com os dados do item anterior, compare $\mathrm{d}y$ com Δy.

a) A derivada é dada por $f'(x) = 2x$. b) Devemos calcular $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$, para os dados do enunciado, logo

$$\mathrm{d}y = 2\cdot(1)\cdot 0,1 = 0,20,$$

c) Aqui, devemos calcular $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$, ou seja

$$\Delta y = (1+0,1)^2 - 1 = 0,1\cdot 2,1 = 0,21.$$

8.5 Aplicações

A partir da definição e da interpretação geométrica da derivada, visando o esboço do gráfico de uma função, vamos associar tais conceitos com o significado de funções crescente e decrescente. Após vamos discutir os pontos críticos, dentre eles máximo, mínimo e inflexão.

Começamos por relembrar os conceitos de funções crescentes e decrescentes. Para tal, elaboramos a seguinte tabela:

$$\begin{array}{cccl} x_1 < x_2 & \Longrightarrow & f(x_1) < f(x_2) & \text{Crescente} \\ x_1 < x_2 & \Longrightarrow & f(x_1) > f(x_2) & \text{Decrescente} \\ x_1 \leq x_2 & \Longrightarrow & f(x_1) \leq f(x_2) & \text{Não decrescente} \\ x_1 \leq x_2 & \Longrightarrow & f(x_1) \geq f(x_2) & \text{Não crescente} \end{array}$$

Por outro lado, já vimos que o coeficiente angular da reta está associado com a inclinação da reta tangente no ponto. Logo

$$\begin{array}{rcl} \text{Função crescente} & \Longrightarrow & \text{Derivada positiva} \\ \text{Função decrescente} & \Longrightarrow & \text{Derivada negativa} \\ \text{Mudança de sinal } [+/-] \text{ em } [-/+] & \Longrightarrow & \text{Derivada nula} \end{array}$$

EXEMPLO 8.12. INTERVALOS

Seja $x \in \mathbb{R}$. Considere a curva $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$. Discutir os intervalos onde a função é crescente/decrescente.

Começamos por calcular a derivada, usando a notação de linha. A derivada de $f(x)$ é dada por $f'(x) = 3(x+1)(x-3)$. Então, no intervalo $-1 < x < 3$ temos $f'(x) < 0$ a função é decrescente enquanto nos intervalos $x < -1$ e $x > 3$ a função é crescente.

DEFINIÇÃO 8.5.1. PONTOS CRÍTICOS

Pontos satisfazendo a equação $f'(x) = 0$ são chamados críticos. Aqui, discutimos apenas os pontos de máximo e mínimo, a saber:

$$\begin{array}{rcl} \text{Máximo} & \Longrightarrow & f'(x) \text{ muda de } (+) \text{ para } (-) \\ \text{Mínimo} & \Longrightarrow & f'(x) \text{ muda de } (-) \text{ para } (+) \end{array}$$

Regra prática. Achar a derivada. Igualá-la a zero e obter as raízes reais, isto é, os pontos críticos. Examinar a derivada para cada um dos pontos, individualmente.

EXEMPLO 8.13. MÁXIMOS E MÍNIMOS

A partir dos dados do EXEMPLO 8.12 concluímos que os pontos críticos são as raízes da equação $3((x+1)(x-3) = 0$, isto é, $x_1 = -1$ e $x_2 = 3$. Devemos fazer uma análise de cada um deles, individualmente.

• Primeiramente $x_1 = -1$. Neste caso vamos considerar os pontos $x = -2$, à esquerda de x_1 e $x = 0$ à direita de x_1, a fim de fazer a análise. Estes pontos, em princípio, são arbitrários desde que não interfiram em outros pontos críticos. Calculando o valor de $f'(x)$ para estes dois pontos, isto é, à esquerda e à direita de x_1 temos

$$f'(-2) = 13 > 0 \quad \text{e} \quad f'(0) = -9 < 0$$

logo de $(+)$ para $(-)$ é um máximo. Mais para a frente vamos ver que existe uma outra maneira de fazer esta análise, usando a derivada segunda.

• Agora para o outro ponto $x_2 = 3$. Vamos escolher os pontos $x = 2$, à esquerda e $x = 4$ à direita, logo, em analogia ao ponto x_1 obtemos

$$f'(2) = -9 < 0 \quad \text{e} \quad f'(4) = 13 > 0$$

logo de $(-)$ para $(+)$ é um mínimo.

Ressalte-se que, no caso em que não há troca de sinal a função não apresenta nem máximo nem mínimo.

EXEMPLO 8.14. ÁREA MÁXIMA

Ache as dimensões de um retângulo de área máxima entre aqueles que podem ser inscritos numa circunferência de raio r.

Sejam as dimensões de um retângulo x e y. Ao inscrevermos esse retângulo em uma circunferência de raio r, através do teorema de Pitágoras, podemos escrever

$$x^2 + y^2 = (2r)^2$$

de onde, isolando, por exemplo, y, temos $y=\sqrt{4r^2-x^2}$. A área do retângulo, denotada por A, é dada por $A=x\cdot y$. Substituindo y nessa expressão, obtemos

$$A=x\cdot\sqrt{4r^2-x^2},$$

isto é, temos a área do retângulo expressa em termos de uma das dimensões, nesse caso, por opção, x. Devemos agora determinar quais valores de x tornam essa área máxima. Primeiramente, calculamos a derivada de A em função de x sendo r constante. Utilizamos a regra do produto e derivada de função composta, logo

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}=\sqrt{4r^2-x^2}+x\frac{\frac{1}{2}\cdot(-2x)}{\sqrt{4r^2-x^2}},$$

ou ainda, simplificando, na seguinte forma

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}=\frac{4r^2-x^2-x^2}{\sqrt{4r^2-x^2}}.$$

Visto que queremos determinar x a fim de que tenhamos um máximo, devemos igualar essa derivada a zero (um ponto extremo, máximo/mínimo) de onde segue $x=r\sqrt{2}$. A fim de nos certificarmos que é um máximo, basta calcular a derivada segunda e verificar que é negativa.

Agora, para determinar a outra dimensão, basta substituir na relação envolvendo o teorema de Pitágoras de onde concluímos que $y=r\sqrt{2}$. Então, visto que as dimensões são iguais, concluímos que o retângulo nada mais é que um quadrado de lado $r\sqrt{2}$ de onde segue que a área máxima é dada por $A=2r^2$ unidades de área.

DEFINIÇÃO 8.5.2. CONCAVIDADE

O gráfico de $y=f(x)$ é côncavo para cima se a derivada segunda, de y em relação a x, é positiva, caso contrário, negativa, é côncavo para baixo.

Podemos, ainda, identificar os pontos de máximo, de mínimo e de inflexão (vamos ver a seguir), segundo o critério:

$$\begin{array}{rcl} \text{Se } f'(x)=0 \text{ e } f''(x)<0 & \Longrightarrow & \text{Máximo} \\ \text{Se } f'(x)=0 \text{ e } f''(x)>0 & \Longrightarrow & \text{Mínimo} \\ \text{Se } f''(x)=0 & \Longrightarrow & \text{Inflexão} \end{array}$$

EXEMPLO 8.15. MÁXIMO E MÍNIMO. CRITÉRIO

Ainda, com os mesmos dados do EXEMPLO 8.12, vamos obter a derivada segunda a partir da derivada de ordem um

$$f'=3x^2-6x-9 \qquad \Longrightarrow \qquad f''=6x-6.$$

Calculando a derivada segunda para $x_1=-1$ e $x_2=3$ temos que

$$\begin{array}{rcl} f''(-1)=-12<0 & \Longrightarrow & \text{Máximo} \\ f''(3)=12>0 & \Longrightarrow & \text{Mínimo} \end{array}$$

DEFINIÇÃO 8.5.3. PONTO DE INFLEXÃO

Pontos de uma curva que separam arcos de concavidades contrárias (a derivada segunda muda de sinal) são chamados pontos de inflexão. Nestes pontos $f''(x) = 0$.

Regra prática. Ache $f''(x)$, iguale-a a zero e determine as raízes reais. Examine o sinal de $f''(x)$ para cada uma das raízes (à esquerda e à direita).

$$\begin{array}{rcl} f''(x) \text{ é positiva} & \Longrightarrow & \text{Curva côncava para cima} \\ f''(x) \text{ é negativa} & \Longrightarrow & \text{Curva côncava para baixo} \end{array}$$

EXEMPLO 8.16. INFLEXÃO

Ainda, com os mesmos dados do EXEMPLO 8.12, a derivada segunda é dada por $f'' = 6x - 6$. Resolvendo a equação $f''(x) = 0$ temos que $x = 1$ é a abscissa do ponto de inflexão.

$$\begin{array}{rcl} f''(-1) = -12 < 0 \text{ (à esquerda de } x = 1) & \Longrightarrow & \text{Côncava para baixo} \\ f''(3) = 12 > 0 \text{ (à direita de } x = 1) & \Longrightarrow & \text{Côncava para cima} \end{array}$$

EXEMPLO 8.17. ESBOÇO DE UM GRÁFICO. REGRA PRÁTICA

A fim de esboçarmos um gráfico (não necessariamente uma parábola ou uma reta, como já sabemos) no caso geral, vamos escrever a seguinte regra que, em linhas gerais, coleta as anteriores com o objetivo único de tal esboço. Após esta regra, vamos exemplificar com os dados do EXEMPLO 8.12 anteriormente discutido separadamente.

- Determine a derivada primeira; iguale-a a zero e determine as raízes reais desta equação (pontos críticos). Examine uma a uma as raízes para determinar, se houver, os pontos críticos.
- Obtenha a derivada segunda; iguale-a a zero e determine as raízes reais desta equação. Examine uma a uma as raízes para determinar, se houver, pontos de inflexão.
- Calcule as ordenadas para as raízes obtidas nos dois passos anteriores. Elabore uma tabela marcando pontos convenientes, isto é, além dos obtidos nos dois passos anteriores, aqueles 'próximos' (à esquerda e à direita) de tais pontos. É conveniente elaborar a tabela com x crescente.
- Esboce o gráfico valendo-se da tabela.

EXEMPLO 8.18. SEJA $x \in \mathbb{R}$. ESBOÇAR O GRÁFICO PARA $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$.

- A derivada primeira é $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$ que igualada a zero fornece a equação algébrica $x^2 - 2x - 3 = 0$ cujas raízes são $x_1 = -1$ e $x_2 = 3$ (Pontos críticos, possíveis candidatos a máximo/mínimo)

$$\begin{array}{rcll} x_1 = -1 & \Longrightarrow & f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 4 = 9 & \text{Máximo} \\ x_2 = 3 & \Longrightarrow & f(3) = (3)^3 - 3(3)^2 - 9(3) + 4 = -23 & \text{Mínimo} \end{array}$$

Então o ponto $P_1(-1, 9)$ é um ponto de máximo enquanto o ponto $P_2(3, -23)$ é um ponto de mínimo.
- A derivada segunda é $f''(x) = 6x - 6$ que igualada a zero fornece a equação algébrica $x - 1 = 0$ cuja raiz é $x = 1$. Calculando $f(1) = -7$ temos que o ponto $P_3(1, -7)$ é ponto de inflexão.
- Elaborando a tabela, conforme já mencionamos, é conveniente considerá-la com x crescente. Vamos escolher quatro pontos considerados convenientes, a saber: $x = -2$, à esquerda de $x = -1$; $x = 0$, à direita de $x = -1$ e à esquerda de $x = 1$; $x = 2$, à direita de $x = 1$ e à esquerda de $x = 3$ bem como $x = 4$ à direita de $x = 3$.

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Ponto	Concavidade
-2	2	-9	< 0		Para baixo
-1	9	0	< 0	Máximo	Para baixo
0	4	-9	< 0		Para baixo
1	-7	-12	$= 0$	Inflexão	
2	-18	-9	> 0		Para cima
3	-23	0	> 0	Mínimo	Para cima
4	-16	15	> 0		Para cima

• Esboço do gráfico

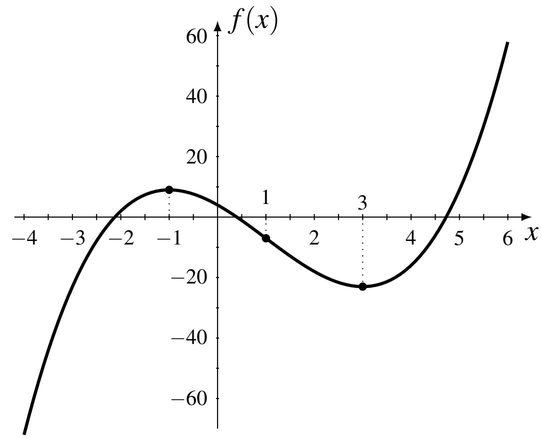


Figura 8.4: Esboço gráfico para $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$.

EXEMPLO 8.19. RETAS TANGENTE E NORMAL

A fim de concluir este capítulo de derivadas vamos, aproveitando ainda o EXEMPLO 8.12 explicitar as contas a fim de obtermos a equação da reta tangente no ponto de inflexão bem como a equação da respectiva reta normal.

Sabemos que o coeficiente angular está relacionado com a derivada primeira, isto é, $m = f'(x)$ calculada para a abscissa $x = 1$ (ponto de inflexão) de onde segue $m = -12$. Logo, a equação da reta tangente é dada por $y - (-7) = -12(x-1)$ ou ainda $y = -12x + 5$. Por outro lado, a equação da reta normal, passando por este ponto, tem coeficiente angular dado por $m = 1/12$ logo a equação da reta normal é $y - (-7) = (1/12)(x-1)$ ou ainda $12y - x + 85 = 0$.

Vamos concluir, apresentando as chamadas retas assíntotas, isto é, retas que se aproximam da curva, porém não tocando-a nem cortando-a. Visto ser uma reta, podemos ter assíntotas verticais (reta paralela ao eixo das ordenadas); oblíquas (em relação aos eixos coordenados) e horizontais (reta paralela ao eixo das abscissas) um caso particular das assíntotas oblíquas.

DEFINIÇÃO 8.5.4. RETA ASSÍNTOTA

Considere um ponto $P(x, y)$ percorrendo uma curva contínua de equação $y = f(x)$, de modo que, pelo menos uma de suas coordenadas (abscissa ou ordenada) tende ao infinito, enquanto a distância entre $P(x)$ e uma determinada reta, tende a zero (tão próxima quanto se queira). Essa reta é chamada assíntota a $y = f(x)$.

Vamos apresentar separadamente as retas assíntotas, isto é, primeiramente a assíntota vertical para, depois, apresentar a reta assíntota oblíqua, bem como, a reta assíntota horizontal, como um caso particular da oblíqua.

DEFINIÇÃO 8.5.5. ASSÍNTOTA VERTICAL

Se existe um parâmetro $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{\alpha \to \infty} f(x) = \infty$ a reta $x = \alpha$ é uma reta assíntota vertical. Em vários casos essa reta está associada com abscissas que devem ser excluídas do domínio de definição da função.

DEFINIÇÃO 8.5.6. ASSÍNTOTA OBLÍQUA

Sejam $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{R}$. Se existem os limites

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m_1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - m_1 x] = n_1$$

a reta de equação $y = m_1 x + n_1$ é uma assíntota. É chamada oblíqua à direita se $m_1 \neq 0$, caso contrário, horizontal à direita se $m_1 = 0$ (paralela ao eixo das abscissas). De modo inteiramente análogo, quando $x \to -\infty$, isto é, existem os limites

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = m_2 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to -\infty} [f(x) - m_2 x] = n_2$$

a reta de equação $y = m_2 x + n_2$ é uma assíntota. É chamada oblíqua à esquerda se $m_2 \neq 0$, caso contrário, horizontal à esquerda se $m_2 = 0$ (paralela ao eixo das abscissas).

EXEMPLO 8.20. SEJA $x \in \mathbb{R}$. ESBOÇAR O GRÁFICO $y \times x$ SENDO $y = f(x) = x^2/\sqrt{4x^2 - 2}$

Começamos por notar que se trata de uma função par, $f(-x) = f(x)$ e, portanto, tem seu gráfico simétrico em relação ao eixo vertical (eixo das ordenadas). Como mencionamos, os valores de x tais que $4x^2 - 2 = 0$ e que devem ser excluídos do domínio, determinam as assíntotas verticais, como vamos ver a seguir.

O domínio da função é tal que $4x^2 - 2 > 0$, isto é,

$$\mathscr{D} = \{x \in \mathbb{R} : x < -\sqrt{2}/2 \text{ ou } x > \sqrt{2}/2\}.$$

A partir de agora, vamos procurar extremos (note que $x = 0$ está fora do domínio), isto é, pontos de mínimo ou máximo, bem como pontos de inflexão, que estão associados às derivadas. Primeiramente, calculamos a derivada primeira que, igualada a zero, fornece, se existirem, candidatos a mínimo ou máximo, ou ainda, um extremo (a abscissa de um extremo). Temos, para a derivada primeira

$$y' = (4x^2 - 2)^{-3/2}[2x(4x^2 - 2) - 4x^3]$$

que, igualada a zero fornece: $x = 0$ (não convém, pois está fora do domínio) e $x = \pm 1$. Substituindo esses valores na função temos os pontos (extremos)

$$A(-1, \sqrt{2}/2) \qquad \text{e} \qquad B(1, \sqrt{2}/2).$$

Agora, calculando a derivada segunda a fim de verificar se temos pontos de inflexão, podemos escrever

$$y'' = 8(4x^2-2)^{-5/2}(x^2+1)$$

a qual não se anula para $x \in \mathbb{R}$, logo não temos pontos de inflexão. Ainda mais, substituindo o valor das abscissas $x = \pm 1$ na expressão da derivada segunda obtemos

$$y''|_{x=\pm 1} = 8[4(\pm)^2-2)^{-5/2}][(\pm 1)^2+1] > 0$$

isto é, A e B são pontos de mínimo.

Enfim, vamos procurar pelas assíntotas, se existirem. Começamos com as verticais que, como já mencionamos, estão associadas com o domínio da função. Então, visto que existe α tal que $\lim\limits_{\alpha\to\infty} f(x) = \infty$, temos que as retas $x=-1$ e $x=1$ são as assíntotas verticais. As assíntotas oblíquas são tais que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{4x^2-2}} = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{\sqrt{4x^2-2}} - \frac{x}{2}\right) = 0$$

de onde $y = x/2$ é a equação da reta assíntota à direita. Por simetria (tratamento é análogo) $y = -x/2$ é a equação da reta assíntota à esquerda. Logo, o esboço do gráfico é como na Figura 8.5.

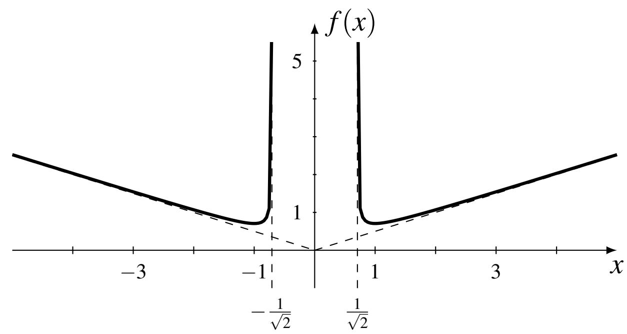


Figura 8.5: Esboço do gráfico $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{4x^2-2}} \times x$.

EXEMPLO 8.21. A LEI DA REFRAÇÃO DE SNELL

A lei da refração de Snell relaciona os índices de refração com os ângulos de incidência e refração, ambos formados com a normal à superfície. Para obter essa lei, vamos utilizar o princípio de Fermat que assegura: Propagando-se do ponto P_1 para P_2, o raio escolhe o caminho para o qual o tempo de propagação é um extremo, neste caso, um mínimo.

Um raio de luz segue um caminho em linha reta num meio homogêneo, incidindo no ponto P de uma interface, onde é refratado, seguindo outro caminho, também em linha reta, agora em um outro meio, conforme Figura 8.6.

Utilizamos a notação $i = 1,2$ para denotar o meio um, com índice de refração n_1 e o meio dois, com índice de refração n_2, sendo $n_i = c/v_i$, onde v_i é a velocidade no meio e c, uma constante, a velocidade da luz no vácuo. Os ângulos θ_i são medidos em relação à normal.

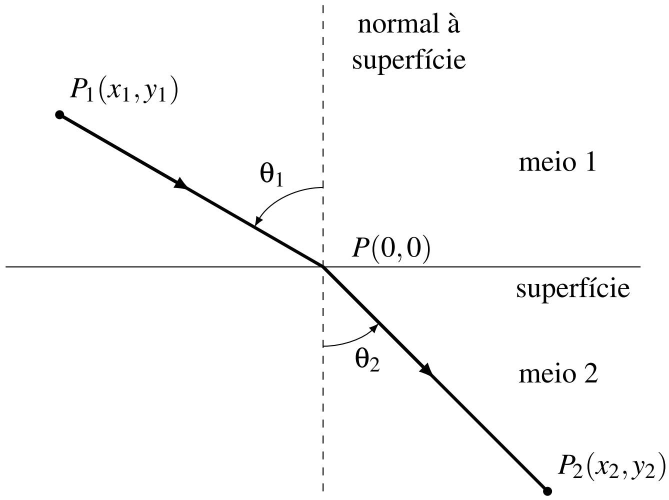


Figura 8.6: Lei da refração de Snell.

Mantidos os pontos P_1 e P_2 fixos, P podendo variar, vamos encontrar o menor caminho (Fermat) que o raio percorre do ponto P_1 até atingir o ponto P_2. Sejam t_1 e t_2 os tempos para percorrer P_1P e PP_2, respectivamente. Logo, $t = t_1 + t_2$ é o tempo para percorrer P_1PP_2, ou seja,

$$t = \frac{l_1}{v_1} + \frac{l_2}{v_2} = \frac{1}{c}(n_1 l_1 + n_2 l_2)$$

isto é, o tempo expresso em termos dos índices de refração e as distâncias. Então, substituindo o valor das distâncias e utilizando x, a abscissa do ponto $P(x,0)$, como parâmetro, podemos escrever

$$ct = n_1\sqrt{(x_1 - x)^2 + y_1^2} + n_2\sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}$$

que é a expressão que devemos minimizar. Derivando ct em relação ao parâmetro x e igualando a zero obtemos

$$\frac{n_1(x - x_1)}{\sqrt{(x_1 - x)^2 + y_1^2}} + \frac{n_2(x - x_2)}{\sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}} = 0. \tag{8.1}$$

Da Figura 8.6, já levando em conta os sinais e da definição da linha trigonométrica seno, podemos escrever as seguintes expressões

$$\operatorname{sen}\theta_1 = \frac{x - x_1}{\sqrt{(x_1 - x)^2 + y_1^2}} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}\theta_2 = \frac{x_2 - x}{\sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}}. \tag{8.2}$$

Introduzindo as Eqs.(8.2) na Eq.(8.1) e rearranjando, obtemos

$$n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2$$

que é a lei da refração de Snell.

8.6 Exercícios

1. Considere a área de um círculo de raio r dada por $A(r) = \pi r^2$. Calcule a razão

$$\frac{A(r+\varepsilon) - A(r)}{\varepsilon}$$

isto é, a taxa média da variação da área em função do raio. Calcule o limite $\varepsilon \to 0$, a derivada da área em relação ao raio e mostre que é igual ao comprimento da respectiva circunferência.

2. Calcule as dimensões de um cilindro de volume V com menor superfície.

3. Na Economia o termo marginal é usado para acentuar a taxa de variação como indicador de como variam o custo, a receita e o lucro em resposta à variação de uma unidade. Suponha que o custo para se produzir x unidades, em reais, seja:

$$C(x) = x^3 - x^2 + 25x + 500$$

e que a produção diária seja de 20 unidades. a) Qual será o custo extra, se o nível de produção aumentar de 20 para 21 unidades por dia? e b) Qual é o custo marginal quando $x = 20$ unidades?

4. Um fabricante vende x unidades de um Ω por semana ao preço, em reais, de $P(x) = 100 - x/2$. O custo destas x unidades é $y = 30x + 20$. Sabendo-se que a receita é dada por $x \cdot P(x)$ e que o lucro é a receita menos o custo, qual é o nível de produção que proporciona lucro máximo?

5. A lei de movimento de um ponto material, lançado no plano vertical, formando um ângulo θ em relação à horizontal, com velocidade inicial v_0 é dada por

$$\begin{aligned} x \equiv x(t) &= v_0 t \cos\theta \\ y \equiv y(t) &= v_0 t \,\mathrm{sen}\,\theta - \tfrac{gt^2}{2} \end{aligned}$$

onde estamos desprezando a resistência do ar e g é uma constante, a aceleração gravitacional. Determine a trajetória do movimento $y \times x$ e o alcance.

6. Deseja-se construir um canteiro em forma de um setor circular de raio r e ângulo central θ. Determine r e θ de maneira que, para uma área conhecida, o perímetro seja mínimo.

7. Uma das bases de um trapézio isósceles é o diâmetro de um círculo de raio r e as extremidades da outra base estão sobre a circunferência do círculo. Sabendo-se que a área do trapézio é máxima, determine o comprimento da outra base.

8. Mostrar a regra do produto.

9. Seja $x > 0$. Mostre que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) = \frac{1}{x}.$$

10. Mostre que a derivada de $y = \cos(ax)$ é $y' = -a\,\mathrm{sen}(ax)$, sendo a uma constante real.

11. Utilize a regra do produto para calcular a derivada das funções

$$\text{(a)} \quad y = x^2 \cos(3x) \qquad \text{e} \qquad \text{(b)} \quad y = \mathrm{sen}\,(x) \ln x$$

12. Utilize a regra do quociente para calcular a derivada das funções

$$\text{(a)} \quad y = x^2/\cos(3x) \qquad \text{e} \qquad \text{(b)} \quad y = \operatorname{sen}(x)/\ln x$$

13. Utilize a regra da função composta (regra da cadeia) para calcular a derivada das funções

$$\text{(a)} \quad y = [x^2 + \cos(3x)]^2 \qquad \text{e} \qquad \text{(b)} \quad y = \sqrt{\operatorname{sen}(x)/\ln x}$$

14. Considere as funções

$$\text{(a)} \quad y = x^2 + 1 \qquad \text{e} \qquad \text{(b)} \quad y = x + \operatorname{sen}(x).$$

Calcule a derivada $\mathrm{d}x/\mathrm{d}y$.

15. Determine o valor de a de modo que $y = ax$ seja tangente à parábola de equação $y = x^2 + 1$.
16. Escreva as equações da tangente e da normal à curva $y = 3x^2 + 4x + 3$ no ponto $(-1, 2)$.
17. Determine dois números positivos, tais que sua soma seja S e seu produto seja o maior possível.
18. Queremos construir um recipiente em forma de um cilindro reto a fim de armazenar V_0 litros de água. Que dimensões deve ter o cilindro de modo a proporcionar maior economia possível, isto é, de modo que a área total seja mínima?
19. Calcular o ângulo formado pela interseção das parábolas $y = x^2 + 1$ e $y = -x^2 + 2x + 1$.
20. Um líquido goteja em um recipiente. Após t horas, há $5t - \sqrt{t}$ litros no recipiente. Qual a taxa de gotejamento do líquido no recipiente, em litros por hora, quando $t = 16$ horas?
21. Em que ponto a tangente à parábola $y = x^2 - 7x + 3$ é paralela à reta $2x + y - 3 = 0$?
22. Mostre o limite fundamental
$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) = 1.$$
23. Utilize a regra de l'Hôpital para calcular os limites

$$\text{(a)} \quad \lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} \right] \qquad \text{e} \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x \to 1} \left[\frac{x(\ln x - 1) + 1}{(x-1)\ln x} \right].$$

24. Considere uma reta passando pelo ponto $P(x_0, y_0)$ e coeficiente angular m. a) Escreva a equação da reta. b) Escreva a equação da reta normal à reta passando por $P(x_0, y_0)$.
25. Seja $x \in \mathbb{R}$. Discuta os pontos de máximo/mínimo associados às funções, se houver:

$$\text{a)} \quad f(x) = x^5 + 6x^4 \qquad\qquad \text{b)} \quad g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 4.$$

26. Um cone acha-se inscrito numa esfera de raio r. Expressar o volume do cone, denotado por $v(x)$, como sendo $\pi\ell^2 x/3$ onde 2ℓ é o diâmetro da base do cone enquanto x é a altura do cone de modo a obter a função $v(x) = \pi x^2(2r - x)/3$. Mostre que a altura do cone de máximo volume é $4r/3$.

27. Esboçar o gráfico, destacando, quando for o caso, as assíntotas, para:

a) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 1$ b) $g(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}$

c) $h(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$ d) $i(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

e) $j(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ f) $k(x) = x^3 - 9x$

28. Determine os pontos de máximo/mínimo, se houver, para

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$ b) $g(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x+1}$

29. Esboce o gráfico das funções do exercício anterior.

30. Determine os pontos de máximo/mínimo, se houver, para a função $f(x) = x^3 - 3x + 3$ no intervalo fechado $[-2, +2]$.

31. Esboce o gráfico da função do exercício anterior.

32. Considere a função $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$. Determine o domínio e justifique se existe ponto de inflexão.

33. Seja $x \geq -1$. Esboce o gráfico da função do exercício anterior.

34. Mostre que a altura de um cilindro reto de volume máximo, inscrito em uma esfera de raio r, é igual a $2r\sqrt{3}/3$.

35. Demonstre que de todos os triângulos isósceles inscritos em um círculo dado, o de maior perímetro é o equilátero.

36. Construir um trapézio isósceles com área A de modo que tenha perímetro mínimo. Sabendo que o ângulo da base do trapézio é θ, mostre que a medida dos lados não paralelos é igual a $\sqrt{A/\operatorname{sen}\theta}$.

37. Seja $x \in \mathbb{R}$. Sabendo que a derivada da função $y(x) = \operatorname{sen} x$ é $y'(x) = \cos x$, esboce, num mesmo sistema de eixos, os gráficos $y(x) \times x$ e $y'(x) \times x$. O que você pode concluir?

38. Utilize a definição para calcular as derivadas nas abscissas dos pontos:

a) $f(x) = x^2 - 8x + 9$ e $a = 1$ b) $f(x) = 5x^2 + 6x - 1$ e $a = 2$;

c) $g(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ e $a = -3$; d) $g(x) = \dfrac{x}{x^2+2}$ e $a = 2$;

e) $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+7}}$ e $a = 2$; f) $h(x) = \sqrt{x}$ e $a = 4$.

39. Use a definição e mostre que a derivada de $f(x) = \cot x$ em relação a x é $f'(x) = -\csc^2 x$.

40. Utilize a definição para mostrar que a derivada da função $h(x) = \operatorname{sen}(ax)$ em relação a x é a função $h'(x) = a\cos(ax)$, onde $a \in \mathbb{R}$.

41. Utilize a regra do produto para calcular a derivada das funções:

a) $y = 2x\cos x$ b) $y = (3x^2+1)\,e^x$
c) $y = x^2 e^{3x}$ d) $y = e^{-2x}\,\mathrm{sen}(3x)$

42. Utilize a regra do quociente para calcular a derivada das funções:

a) $y = \dfrac{4x+5}{x^2-1}$ b) $y = \dfrac{x\,e^{2x}}{\ln x}$

c) $y = \dfrac{x^2}{x^2+x+1}$ d) $y = \dfrac{\cos(2x)}{e^x}$

43. Utilize a regra da cadeia para calcular a derivada das funções

a) $y = \sqrt{x+e^x}$ b) $y = \cos(x^2+3)$

c) $y = [\mathrm{sen}\,x + \cos(x^2)]^3$ d) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}$

44. Sejam $a,b,c \in \mathbb{R}$ e $f(x) = ax^2+bx+c$. Sabendo que $f(2) = 26$, $f'(2) = 23$ e $f''(2) = 14$. Qual é o valor de $f(1)$?

45. Calcule a derivada de $y(x) = \ln(x^3+a)$ com $a =$constante.

46. Calcule $y'(x)$ sendo $xy^2+yx^2 = 1$.

47. Seja $a = 10\text{m/s}^2$ a aceleração gravitacional. Determine a velocidade de um grave, abandonado em queda livre, ao fim de 8 segundos.

48. Quais são a velocidade angular e a aceleração em $t = 5$s de uma roda que gira, sabendo que a lei horária é $\theta = at^2$ com $a =$constante e θ em radianos.

49. Determinar as equações das retas tangente e normal à curva de equação $y = 6x^2-4x$ em $x = 1$.

50. Qual é a relação entre a velocidade linear, denotada por v, e a velocidade angular, denotada por w, num movimento circular uniforme?

51. Calcular a derivada $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ da função $y(x)$ definida na forma paramétrica pelas equações. Quando possível, expresse $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ em função de x.

a) $\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = 4t+3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 3t-1 \\ y = 9t^2-6t \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 2t \\ y = t^2-3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = 2-t \\ y = t^3-4t \end{cases}$

52. Sabendo que $y = f(x)$ são funções diferenciáveis implicitamente, determine $y'(x)$

$$\text{a)}\quad x^2y^2 + x\,\mathrm{sen}\,y = 0 \qquad \text{b)}\quad y^3 = \frac{x-y}{x+y}$$

$$\text{c)}\quad xy^2 + 2y^3 = x - 2y \qquad \text{d)}\quad e^y = x + y$$

53. Determine o valor de k de modo que $y = 6x + 4$ seja tangente à parábola $y = x^2 + k$.

54. Determine a equação da reta tangente à curva $x^2 + \dfrac{y}{2} - 1 = 0$ no ponto $(-1, 0)$.

55. Determine a equação da reta tangente à curva $y = x^2 - 4$ no ponto $(3, 5)$.

56. Utilize a regra de l'Hôpital para calcular os limites

$$\text{a)}\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{sen}^2\,x}{1-\cos x}\right) \qquad \text{b)}\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{9x+1}}{\sqrt{x+1}}\right)$$

$$\text{c)}\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x - \cos(2x)}{1-\cos x}\right) \qquad \text{d)}\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^x-1}{x^3+4x}\right)$$

57. Utilize a regra de l'Hôpital para calcular os limites

$$\text{a)}\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{\mathrm{e}^x-1}\right) \qquad \text{b)}\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{1}{3}x^3+2x-2\sin x}{4x^3}\right)$$

$$\text{c)}\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2+x} - \frac{1}{\cos x - 1}\right) \qquad \text{d)}\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^x-1}{e^x+2}\right)$$

58. Inscreva um retângulo numa elipse de equação $x^2/\alpha^2 + y^2/\beta^2 = 1$, com α e β constantes. Determine suas dimensões a fim de que sua área seja máxima.

59. Seja $x \in \mathbb{R}$. Esboçar o gráfico $y \times x$ sendo:

$$y = f(x) = x^2/\sqrt{x^2-1}.$$

60. Seja $x \in \mathbb{R}$. Esboçar o gráfico $y \times x$ sendo:

$$y = f(x) = x/\sqrt{x^2-1}.$$

61. Mostre que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$ com $a > 0$.

62. Utilize a regra de l'Hôpital para calcular o limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2+2\cos x}{x^4}.$$

63. Utilize a regra de l'Hôpital para calcular o limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x-\operatorname{sen} x)(x+\operatorname{sen} x)}{x^4}.$$

64. Utilize a regra de l'Hôpital para mostrar os limites fundamentais

$$\text{a)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} \qquad \text{e} \qquad \text{b)}\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

Compare com as demonstrações no texto.

65. Mostre os resultados a seguir

$$\text{a)}\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{senh} x=\cosh x \qquad \text{e} \qquad \text{b)}\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh x=\operatorname{senh} x\cdot$$

66. Determine as assíntotas da curva $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$.

8.6.1 Respostas e/ou sugestões

1. Direto da definição.
2. Mostre que a altura do cilindro deve ser o dobro do raio da base.
3. a) 1245 e b) 1185.
4. 70 unidades.
5. $y(x)=x\cdot\tan\theta-\dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\cdot x^2$.
6. $r=\sqrt{A}$ e $\theta=2$ rad.
7. O comprimento da outra base é r.
8. Direto da definição.
9. Utilize a definição e o limite fundamental (trigonométrico).
10. Utilize a regra da cadeia.
11. a) $2x\cos(3x)-3x^2\operatorname{sen}(3x)$ e b) $\cos x\ln x+\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.
12. a) $\dfrac{2x\cos(3x)+3x^2\operatorname{sen}(3x)}{\cos^2(3x)}$ e b) $\dfrac{x\cos x\ln x-\operatorname{sen} x}{x\ln^2 x}$.
13. a) $2[x^2+\cos(3x)][2x-3\operatorname{sen}(3x)]$ e b) $\dfrac{1}{2x}\dfrac{x\cos x\ln x-\operatorname{sen} x}{\ln^2 x\sqrt{\operatorname{sen} x/\ln x}}$.
14. a) $\dfrac{1}{2x}$ e b) $\dfrac{1}{1+\cos x}$.

15. $a = 2$.

16. Tangente $y = -2x$ e normal $y = (x+5)/2$.

17. Os números são iguais a $S/2$.

18. Raio $r = (V/2\pi)^{\frac{1}{3}}$ e altura $h = (4V/\pi)^{\frac{1}{3}}$.

19. $\theta = \arctan 2$.

20. $39/8$ litros por hora.

21. $Q(5/2, -33/4)$.

22. Utilize a regra de l'Hôpital.

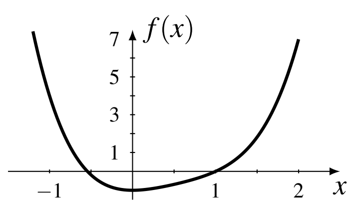
23. a) $-1/3$ e b) $1/2$.

24. a) $y - y_0 = m(x - x_0)$, b) $y - y_0 = -1/m(x - x_0)$

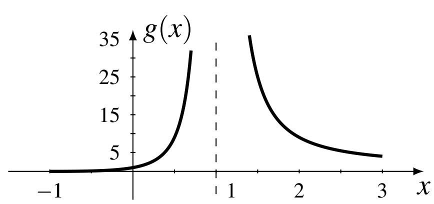
25. a) $x = -24/5$ (máximo), b) $x = -2$ (máximo) e $x = 1$ (mínimo).

26. Expresse o volume do cone em função da altura do cone e do raio da esfera.

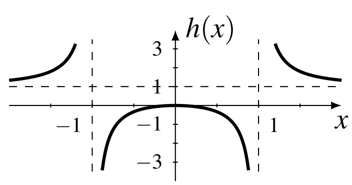
27. Esboço gráfico. a) Não tem assíntota. b) Assíntota vertical. c) Assíntotas vertical e horizontal. d) Não tem assíntota. e) Assíntota horizontal. f) Não tem assíntota.



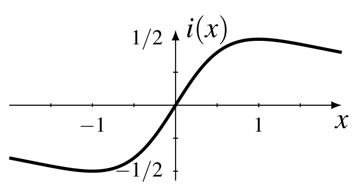
(a)



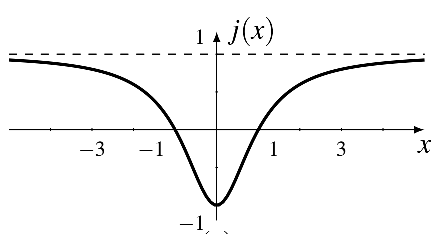
(b)



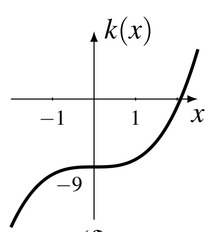
(c)



(d)



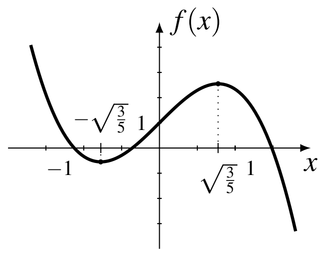
(e)



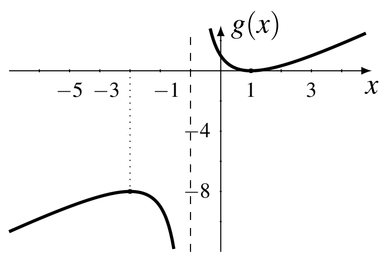
(f)

28. a) $x = 1$ abscissa do ponto de máximo e $x = 3$ abscissa do ponto de mínimo e b) $x = 1$ abscissa do ponto de mínimo e $x = -3$ abscissa do ponto de máximo.

29. Esboço gráfico. a) Não tem assíntota. b) Assíntota vertical $x = -1$.



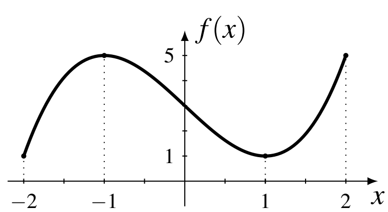
(a)



(b)

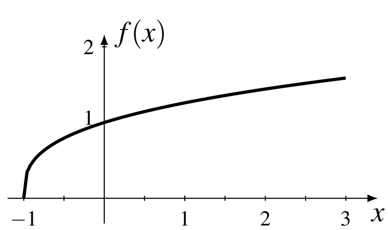
30. $x = -1$ abscissa do ponto de máximo e $x = 1$ abscissa do ponto de mínimo

31. Esboço do gráfico.



32. Domínio $x \in \mathbb{R}$. Não existe ponto de inflexão, pois a derivada segunda não se anula.

33. Esboço do gráfico.

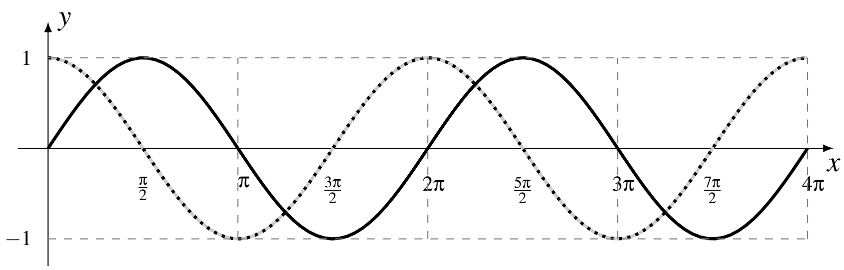


34. Expresse o volume em função da altura do cilindro e do raio da esfera.

35. Utilize o fato que a altura do triângulo isósceles é $h = 3r/2$ onde r é o raio do círculo. Mostre que os lados são todos iguais a $r\sqrt{3}$, logo triângulo equilátero.

36. Seja x a medida dos lados não paralelos. Expresse o perímetro do trapézio em função de x e de A, a área do trapézio.

37. Esboço gráfico. Senoide e cossenoide.



38. a) -6; b) 26; c) $3/32$; d) $-\dfrac{1}{18}$; e) $-1/54$; f) $\dfrac{1}{4}$.

39. Utilize o limite fundamental trigonométrico.

40. Utilize o limite fundamental trigonométrico.

41. a) $2(-x\,\mathrm{sen}\,x + \cos x)$; b) $(3x^2 + 6x + 1)\,e^x$; c) $x\,e^{3x}(2 + 3x)$;
d) $e^{-2x}[3\cos(3x) - 2\,\mathrm{sen}(3x)]$.

42. a) $-\dfrac{2(2x^2 + 5x + 2)}{(x^2 - 1)^2}$; b) $\dfrac{e^{2x}[(2x + 1)\ln x - 1]}{(\ln x)^2}$; c) $\dfrac{x(x + 2)}{(x^2 + x + 1)^2}$; d) $-\dfrac{[2\,\mathrm{sen}(2x) + \cos(2x)]}{e^x}$.

43. a) $\dfrac{e^x + 1}{2\sqrt{x + e^x}}$; b) $-2x\,\mathrm{sen}(x^2 + 3)$; c) $3[\mathrm{sen}\,x + \cos(x^2)]^2[\cos x - 2x\,\mathrm{sen}(x^2)]$;
d) $\dfrac{2}{3(x + 1)^2}\sqrt[3]{\left(\dfrac{x + 1}{x - 1}\right)^2}$.

44. $f(1) = 10$.

45. $\dfrac{3x^2}{x^3 + a}$.

46. $-\dfrac{y^2 + 2xy}{x^2 + 2xy}$.

47. 80m/s.

48. $w = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ e $\alpha = \mathrm{d}^2\theta/\mathrm{d}t^2$

49. Tangente $y - 8x + 6 = 0$ e normal $8y - x - 15 = 0$.

50. $v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = rw$ onde r é o raio do círculo.

51. a) 2; b) $2x$; c) $x/2$; d) $-3x^2+12x-8$.

52. a) $y'(x) = -(2xy^2+\operatorname{sen} x)/(2x^2y+x\cos y)$; b) $y'(x) = 2y/(3x^2y^2+6xy^3+2x+3y^4)$; c) $y'(x) = (1-y^2)/(2xy+6y^2+2)$; d) $y'(x) = 1/(e^y-1)$.

53. $k = 13$.

54. $y(x) = 4x+4$.

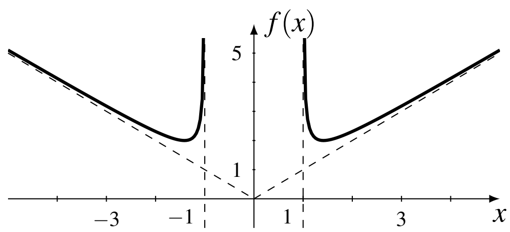
55. $y = 6x-13$.

56. a) 2; b) 3; c) 3; d) ∞.

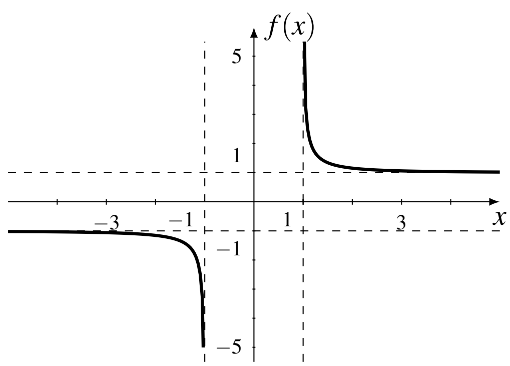
57. a) 2; b) $1/6$; c) ∞; d) 1.

58. $2\alpha\beta$.

59. Assíntotas verticais e oblíquas.



60. Assíntotas verticais e horizontais.



61. Utilize a regra de l'Hôpital.

62. $1/12$.

63. $1/3$.

64. a) 1 e b) e.

65. a) Direto da definição. b) Direto da definição.

66. $x = \pm 1$ são assíntotas verticais e $f(x) = \pm x$ são assíntotas oblíquas.

Capítulo 9

Integrais

Calcular o comprimento de uma astroide e a área por ela delimitada.

Neste capítulo vamos introduzir o conceito de integral a fim de calcularmos áreas delimitadas por curvas planas. A ideia básica que está por traz do conceito de integral pode ser resumida na frase: 'somar fatias bem finas'. Neste processo de fatiar, em cada fatia, colocamos, por exemplo, um retângulo (a área desta figura sabemos calcular) e depois somamos todas as áreas dos retângulos. A fim de melhorar a aproximação, inserimos trapézios reto-retângulos (aqui, também, sabemos calcular a área) e depois somamos as áreas dos trapézios reto-retângulos. Então, conforme aumentamos o número de fatias a área de todos os retângulos somados se aproxima da área que desejamos calcular[1].

Como motivação, vamos calcular a área de uma figura que não sabemos uma 'fórmula' específica. Para tanto, considere a equação da curva descrita por $f(x) = y = \sqrt{x}$ no intervalo $0 \leq x \leq 16$. a) Esboçar o gráfico $f(x) \times x$ b) Calcular a área, aproximando-a por retângulos (depois, por trapézios), entre esta curva e o eixo x.

Quando a largura da base do retângulo tende a zero, isto é, quando a largura da base é $\mathrm{d}x$ a altura do retângulo tende ao valor da função, $f(x)$, naquele ponto. No caso dos trapézios, quando a altura (distância entre as bases) vai a zero a base média do trapézio reto-retângulo tende ao valor da função. Ainda mais, no caso dos trapézios reto-retângulos, temos uma aproximação por falta ou por excesso, dependendo se consideramos a base maior ou a base menor do trapézio reto-retângulo. Então, chama-se integral definida a soma de todos os infinitos retângulos cuja largura é $\mathrm{d}x$. Analogamente com a soma dos infinitos trapézios reto-retângulos.

Ora, o processo de integrar envolve o conceito de limite, isto é, a integral é um limite. A fim de termos um 'símbolo' para a integral, ou seja, um modo de identificá-la, vamos denotá-la como

$$\int_0^{16} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x.$$

Com esta notação queremos dizer: calcular a área de todos os infinitos retângulos com altura $f(x) = \sqrt{x}$ e com largura $\mathrm{d}x$ no intervalo entre zero e dezesseis. Vamos voltar a este específico caso mais à frente. Aqui, apenas esboçamos três gráficos com os retângulos, com destaque para a largura da base diminuindo e o erro, por excesso, que se comete. Ver Figuras 9.1, 9.2 e 9.3. A Figura 9.4 destaca a área como soma de trapézios.

[1] O processo de fatiar pode ser estendido para o cálculo de volumes porém, aqui, vamos nos concentrar no cálculo de áreas [8, 9, 16, 19].

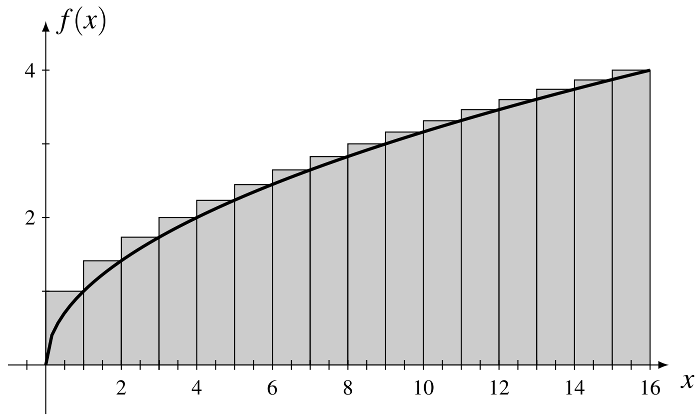


Figura 9.1: Conceito de área abaixo de uma curva. Retângulos.

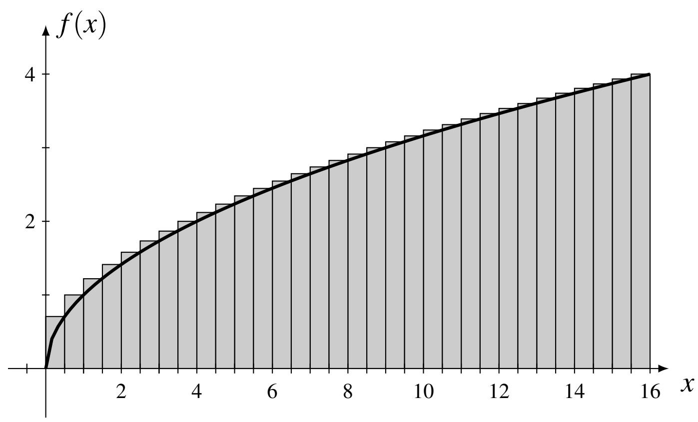


Figura 9.2: Área abaixo de uma curva. Retângulos com largura menor.

9.1 Antiderivada

Voltemos ao problema do MRUV. Já vimos que a equação horária

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2$$

com s_0, v_0 e a constantes reais, fornece, através de uma derivada, a equação da velocidade,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} s(t) = v(t) = v_0 + at$$

bem como, derivando mais uma vez, a aceleração

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} s(t) \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v(t) = a = \text{constante.}$$

Uma pergunta emerge naturalmente, a saber: conhecida a aceleração, como determinar a equação da velocidade? A típica pergunta no sentido contrário, ou seja, o que é conhecido, agora, é a aceleração

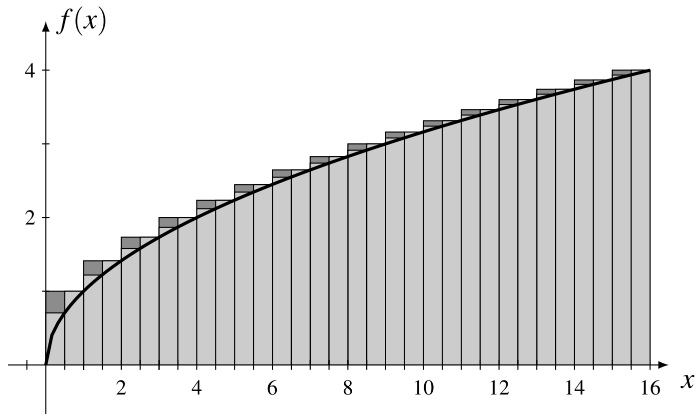


Figura 9.3: Área abaixo de uma curva. Destaque para o ‘excesso’.

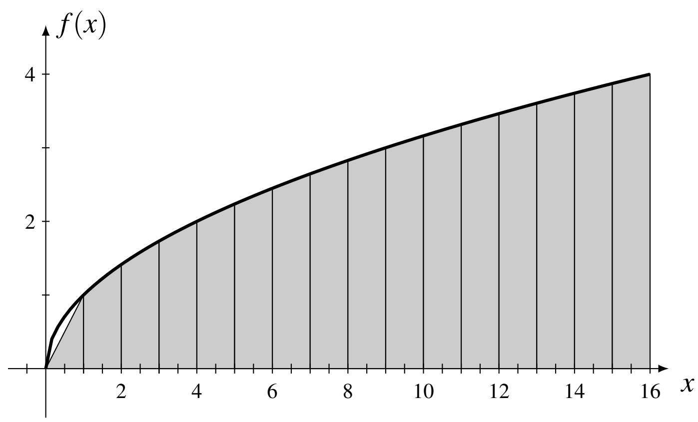


Figura 9.4: Área abaixo de uma curva. Trapézios.

e queremos determinar a equação da velocidade. Este é um problema que envolve o conceito de antiderivada ou primitiva.

Em resumo, antiderivar (calcular a primitiva) significa determinar uma função cuja derivada é conhecida. Vamos, em vez de escrever: calcular a antiderivada simplesmente escrever integrar.

EXEMPLO 9.1. EQUAÇÃO HORÁRIA A PARTIR DA ACELERAÇÃO NO MOVIMENTO RETILÍNEO UNIFORMEMENTE VARIADO

No MRUV a aceleração é uma constante, que vamos denotar por a. Escrever a equação que relaciona a velocidade com o tempo. Sabemos que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v(t) = a$$

ou seja, a derivada temporal da velocidade (agora, desconhecida) é igual a aceleração (agora, conhecida).

É sabido que a derivada primeira de t, em relação a t, é igual à unidade, enquanto a derivada do produto de a (constante) por t, é igual a a, logo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(at).$$

Dessa expressão podemos concluir que $v(t) = at$. Assim, $v(t)$ é chamada uma antiderivada. Ainda mais, o destaque da palavra uma diz respeito ao fato de que em sendo a derivada de uma constante igual a zero, nos permite escrever

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(at) + 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(at) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C_1$$

com C_1 uma constante arbitrária, ou ainda na forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(at + C_1)$$

o que fornece $v(t) = at + C_1$.

A constante C_1 é determinada a partir de uma condição imposta, a chamada condição inicial. Nesse tipo de movimento é costume fornecer a velocidade no instante de tempo $t = 0$, início do movimento, isto é, $v(0) = v_0$, chamada velocidade inicial. Com esta condição obtemos $C_1 = v_0$ de onde segue

$$v(t) = v_0 + at$$

que é a equação horária da velocidade.

Com um procedimento inteiramente análogo podemos concluir que, integrando novamente

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{a}{2}t^2,$$

a chamada lei (equação) horária do movimento, onde devem ser fornecidas, agora, duas condições, a saber: a velocidade inicial e o espaço inicial [5].

PROPRIEDADE 9.1.1. ANTIDERIVADA OU INTEGRAL

Se $F(x)$ é uma antiderivada ou integral de $f(x)$ então $F(x) + C$, com C uma constante arbitrária, também o será.

Antes de apresentarmos propriedades, vamos fazer a conexão do conceito de derivada com o conceito de integral. Para tanto, enunciamos dois teoremas.

TEOREMA 9.1.1. DERIVADA DE UMA FUNÇÃO É NULA

Se a derivada de uma função é igual a zero, para todo x, então a função é uma constante

$$F'(x) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad F(x) = C$$

onde C é uma constante arbitrária.

TEOREMA 9.1.2. ANTIDERIVADAS DE UMA MESMA FUNÇÃO

Se $F_1(x)$ e $F_2(x)$ são duas antiderivadas de uma mesma função $f(x)$, então, $F_1(x)$ e $F_2(x)$ diferem apenas por uma constante, isto é, existe uma constante C tal que

$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

A partir destes dois teoremas podemos encontrar todas as antiderivadas de uma dada função, bastando conhecer uma de suas antiderivadas. Suponha, então, que $f(x)$ seja uma função cujas antiderivadas sejam $F(x)+C$ com C uma constante. Para expressar este fato utilizamos a notação

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C \tag{9.1}$$

onde $\int$ é o sinal de integral e $\mathrm{d}x$ indica que a antidiferenciação é tomada em relação à variável x.

A partir da equação (essa equação é chamada de equação diferencial)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x) = f(x)$$

podemos escrever $\mathrm{d}F(x) = f(x)\,\mathrm{d}x$ que é a chamada forma diferencial. Introduzindo o sinal de integral em ambos os membros, isto é, integrando, temos

$$\int \mathrm{d}F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Comparando essa equação com a Eq.(9.1) temos

$$\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C$$

com C uma constante arbitrária.

Logo, ao integrarmos a diferencial de uma função obtemos a própria função a menos de uma constante arbitrária. Então, o símbolo $\int$ de integração, sem absorver o $\mathrm{d}x$ como parte do símbolo, significa que a operação é inversa à operação denotada pelo símbolo d da diferenciação.

Em resumo, na expressão

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C \qquad \Longrightarrow \qquad F'(x) = f(x)$$

$F(x)$ é uma função primitiva de $f(x)$ e $F(x)+C$ é chamada integral indefinida da função $f(x)$. A função $f(x)$ chama-se integrando; $\mathrm{d}x$ é o elemento de integração e o símbolo $\int$ o sinal de integral.

Antes de passarmos a discutir as propriedades, vamos construir uma pequena tabela de integrais. Para tanto, façamos a pergunta ao contrário, isto é, qual é a função cuja derivada conhecemos?

PROPRIEDADE 9.1.2. CONSTRUÇÃO DE UMA PEQUENA TABELA

Construir uma tabela para as mais frequentes, até agora, diretamente

$$\text{a)} \int \cos x \, \mathrm{d}x; \quad \text{b)} \int \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x; \quad \text{c)} \int e^x \, \mathrm{d}x; \quad \text{d)} \int x^\mu \, \mathrm{d}x$$

com $\mu \neq -1$.

	Integral	Derivada	Forma geral
a)	$\int \cos x \, \mathrm{d}x$	$\operatorname{sen} x$	$\operatorname{sen} x + C$
b)	$\int \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x$	$-\cos x$	$-\cos x + C$
c)	$\int e^x \, \mathrm{d}x$	e^x	$e^x + C$
d)	$\int x^\mu \, \mathrm{d}x$	$\dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1}$	$\dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C$

onde C é uma constante, não necessariamente igual para todas as integrais.

Apenas para explicitar, escolhemos a primeira delas. Então, pensamos do seguinte modo: qual é a função cuja derivada é igual a $\cos x$. Das derivadas sabemos que a função $\operatorname{sen} x$ tem como derivada a função $\cos x$. Visto que a derivada de uma constante é zero, podemos adicionar a constante, isto é, $\operatorname{sen} x + C$, onde C é uma constante arbitrária. Em resumo, a derivada da função $\operatorname{sen} x + C$ é igual $\cos x$, ou seja, o integrando. Pensamento análogo para as demais.

Antes de passarmos aos métodos de integração propriamente ditos, apresentamos duas propriedades envolvendo o produto de uma constante por uma função e a linearidade.

PROPRIEDADE 9.1.3. FATOR CONSTANTE

O fator contante pode ser colocado para fora do sinal de integral, isto é, sendo $C =$ constante, temos

$$\int C f(x) \, \mathrm{d}x = C \int f(x) \, \mathrm{d}x.$$

PROPRIEDADE 9.1.4. LINEARIDADE

A integral indefinida da soma (subtração) algébrica de duas (ou mais) funções é igual a soma (subtração) algébrica das integrais

$$\int [A f_1(x) \pm B f_2(x)] \mathrm{d}x = A \int f_1(x) \mathrm{d}x \pm B \int f_2(x) \mathrm{d}x$$

com A e B constantes arbitrárias.

9.2 Métodos de integração

Nesta seção, vamos discutir duas maneiras de se calcular uma integral indefinida a saber: a) mudança de variável (ou substituição) e b) integração por partes. Estes dois métodos têm por objetivo conduzir a integral de partida em outras, aparentemente, mais simples de serem calculadas (ou mesmo já conhecidas). Não tem jeito, não existe uma fórmula fechada e sim a prática conduz você a escolher a melhor substituição ou mudança de variável. Concluímos a seção com integração onde se faz necessário o uso de frações parciais, conforme apresentado na Seção 7.2. Vamos discutir casos específicos, através de exemplos.

9.2.1 Mudança de variável

Esta metodologia reside no fato de, sempre que possível, podermos conduzir a integral de partida numa outra integral mais simples de ser calculada ou até mesmo numa outra integral que já sabemos o resultado. A melhor substituição, se é que se pode assim chamar, reside no fato de praticar, isto é, quanto mais você pratica, mais fácil se torna o emprego da particular mudança de variável.

EXEMPLO 9.2. SUBSTITUIÇÃO DIRETA E EXPRESSÃO TRIGONOMÉTRICA

Calcular a integral $\int \operatorname{sen} 2x\, \mathrm{d}x$ a partir de duas maneiras distintas. a) Substituição direta e b) Utilizando a expressão do seno do arco dobro.

a) Neste caso, introduzimos a mudança de variável $2x = t$ de onde

$$x = \frac{t}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{2}.$$

Substituindo na integral a ser calculada temos

$$\int \operatorname{sen} 2x\, \mathrm{d}x = \int \operatorname{sen} t\, \frac{\mathrm{d}t}{2} = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} t\, \mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\cos t.$$

Note que a integral na variável t é uma integral conhecida, em particular, consta da nossa pequena tabela de integrais.

Voltando na variável inicial temos

$$\int \operatorname{sen} 2x\, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$$

com C uma constante arbitrária.

b) Seja, agora, a expressão do arco dobro $\operatorname{sen} 2x = 2\cos x \operatorname{sen} x$, logo

$$\int \operatorname{sen} 2x\, \mathrm{d}x = 2\int \operatorname{sen} x \cos x\, \mathrm{d}x \cdot$$

Sabendo que $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$ vamos introduzir a mudança de variável

$$\operatorname{sen} x = t \qquad \Longrightarrow \qquad \cos x\, \mathrm{d}x = \mathrm{d}t$$

logo

$$2\int \operatorname{sen} x \cos x\, \mathrm{d}x = 2\int t\, \mathrm{d}t = 2\frac{t^2}{2} + D$$

com D outra constante arbitrária. Voltando na variável x temos

$$\int \operatorname{sen} 2x \, \mathrm{d}x = \operatorname{sen}^2 x + D.$$

Ora, estes resultados devem ser os mesmos, afinal a integral é uma só e, portanto, deve haver uma relação entre estas constantes, ou seja,

$$\operatorname{sen}^2 x + D = -\frac{1}{2}\cos 2x + C.$$

Lembrando da relação trigonométrica

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

concluímos que as constantes devem obedecer a relação $C - D = 1/2$.

EXEMPLO 9.3. NUMERADOR É A DERIVADA DO DENOMINADOR

Calcular a integral

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e não todos identicamente nulos.

Deve ser notado que o numerador é a derivada do denominador. Assim, introduzimos a mudança de variável $ax^2+bx+c = t$ de onde $(2ax+b)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$. O lado esquerdo da última expressão é exatamente o numerador logo

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

que é uma integral conhecida, em particular, está na nossa pequena tabela. Integrando e voltando na variável inicial, obtemos

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x = \ln|t| + C = \ln|ax^2+bx+c| + C$$

onde C é uma constante arbitrária.

Antes de passarmos para o próximo método, é conveniente mencionar que tanto o primeiro, quanto o segundo exemplo, discutidos acima, deixam claro que, com a substituição de variáveis, conduzimos as integrais em integrais conhecidas, em particular, nestes casos, constando da tabela de integrais. Em resumo, conduzimos as integrais a serem calculadas em integrais conhecidas. E, enfim, devemos voltar nas variáveis de partida.

9.2.2 Integração por partes

Se existe uma 'fórmula' para calcular integrais, podemos dizer que é advinda da chamada integração por partes. Este método está baseado na expressão que fornece a derivada de um produto de funções, isto é, na chamada regra do produto para derivarmos. Sejam $u = u(x)$ e $v = v(x)$ duas funções deriváveis. A partir da regra do produto podemos escrever

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

Integrando ambos os membros obtemos

$$uv = \int u\,\mathrm{d}v + \int v\,\mathrm{d}u$$

ou ainda, na seguinte forma, isolando uma das parcelas no segundo membro,

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u.$$

A dificuldade, vencida com treino e mais treino (resolução de exercícios), reside no fato de escolhermos convenientemente quem são u e $\mathrm{d}v$. Aqui, vamos apresentar três exemplos clássicos de como abordar uma integral via integração por partes. Em geral, estas integrais, além das funções trigonométricas inversas, têm o integrando envolvendo produtos de funções trigonométricas; função exponencial; polinômios e logaritmos.

EXEMPLO 9.4. PRODUTO DE MONÔMIO E FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA

Calcular a integral $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$.

Visto que não conhecemos (não está na nossa tabela inicial) a primitiva (queremos determiná-la) vamos utilizar integração por partes, pois o integrando é um produto de um monômio por uma função trigonométrica. A primeira dúvida é como escolher u e $\mathrm{d}v$. Neste caso e naqueles que temos um monômio elevado a uma potência, é conveniente que o expoente diminua e, portanto, u deve ser escolhido igualando ao monômio e o restante será identificado com $\mathrm{d}v$.

Sejam $u = x$ e $\mathrm{d}v = \cos x\,\mathrm{d}x$. Certifique-se que esta é a melhor escolha. Neste caso a outra possível identificação é $u = \cos x$ e $\mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x$. Temos, então

$$\begin{aligned} u = x \quad &\Longrightarrow \quad \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \cos x\,\mathrm{d}x \quad &\Longrightarrow \quad v = \operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

Note que decompusemos a integral de partida em duas outras, importante, mais simples de serem calculadas (em geral, conhecidas/tabeladas).

Substituindo na expressão para a integral por partes obtemos

$$\begin{aligned} \int x\cos x\,\mathrm{d}x &= x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x \\ &= x\operatorname{sen} x + \cos x + C \end{aligned}$$

onde C é uma constante arbitrária.

EXEMPLO 9.5. PRODUTO DE UMA EXPONENCIAL E UMA FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA

Calcule a integral

$$\Omega \equiv \int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,\mathrm{d}x$$

com a e b constantes reais.

Neste tipo de integral, temos duas possibilidades, a saber

$$u = e^{ax} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}u = a\,e^{ax}\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}v = \operatorname{sen} bx\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad v = -\frac{1}{b}\cos bx,$$

ou, na seguinte forma,

$$u = \operatorname{sen} bx \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}u = b\cos bx\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}v = e^{ax}\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad v = \frac{1}{a}e^{ax}$$

que, obviamente, fornecem o mesmo resultado (certifique-se!).

Substituindo-se na expressão para a integração por partes temos

$$\begin{aligned}\Omega &= -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx - \int\left(-\frac{1}{b}\cos bx\right)a\,e^{ax}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Novamente integração por partes com a escolha

$$u = e^{ax} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}u = a\,e^{ax}\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}v = \cos bx\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad v = \frac{1}{b}\operatorname{sen} bx.$$

Voltando na expressão para Ω obtemos

$$\begin{aligned}\Omega &= -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\left[\frac{1}{b}\operatorname{sen} bx\,e^{ax} - \int\left(\frac{1}{b}\operatorname{sen} bx\right)a\,e^{ax}\,\mathrm{d}x\right] \\ &= -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b^2}\operatorname{sen} bx\,e^{ax} - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Note que a integral que resta é exatamente a integral que estamos querendo calcular, logo

$$\Omega = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b^2}\operatorname{sen} bx\,e^{ax} - \frac{a^2}{b^2}\Omega$$

de onde segue a integral desejada, após simplificação,

$$\Omega = e^{ax}\left(\frac{a\operatorname{sen} bx - b\cos bx}{a^2+b^2}\right) + C$$

onde C é uma constante arbitrária.

Analogamente (certifique-se!) podemos mostrar que

$$\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x = e^{ax}\left(\frac{b\operatorname{sen} bx + a\cos bx}{a^2+b^2}\right) + C$$

com C uma constante arbitrária.

EXEMPLO 9.6. INTEGRANDO CONTENDO UMA FUNÇÃO LOGARITMO

Calcule a integral

$$\int \ln x \, dx.$$

Neste caso temos uma única escolha, a saber

$$\begin{aligned} u &= \ln x \quad \Longrightarrow \quad du = \frac{1}{x}\,dx \\ dv &= dx \quad \Longrightarrow \quad v = x \cdot \end{aligned}$$

Substituindo-se na expressão para o cálculo da integral via integração por partes temos

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \left(\frac{1}{x}\right) dx$$

de onde segue, após a integração restante,

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$$

onde C é uma constante arbitrária.

Note que da equação (equação diferencial)

$$u = \ln x \qquad \Longrightarrow \qquad du = \frac{1}{x}\,dx \qquad \Longrightarrow \qquad \left(\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}\right)$$

podemos concluir que

$$\int \frac{1}{x}\,dx \equiv \int \frac{dx}{x} = \ln x + C$$

com C uma constante arbitrária.

9.2.3 Frações parciais

Como já mencionado na Seção 7.2, esta técnica inverte o processo de reduzir frações ao mesmo denominador, ou seja, expressa uma fração numa soma de frações com denominadores mais simples. Ainda mais, o grau do denominador deve ser maior que o grau do numerador. Se este não for o caso, primeiramente, efetua-se a divisão de modo a separar a 'parte inteira' (fração aparente).

EXEMPLO 9.7. GRAU DO NUMERADOR MAIOR QUE O GRAU DO DENOMINADOR

Seja $a \neq 0$. Calcule a integral

$$\int \frac{x^3 - a^2 x + 2}{x^2 - a^2}\,dx.$$

Visto que o grau do denominador é menor que o grau do numerador devemos escrever (separando a 'parte inteira')

$$\frac{x^3 - a^2 x + 2}{x^2 - a^2} = x + \frac{2}{x^2 - a^2}.$$

A integração da primeira parcela é imediata. Para a segunda vamos utilizar frações parciais, escrevendo-a na forma

$$\frac{2}{x^2 - a^2} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x + a}$$

onde A e B devem ser determinados. Reduzindo ao mesmo denominador comum e rearranjando, obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} A+B &= 0 \\ Aa-Ba &= 2 \end{cases}$$

com solução dada por $A = 1/a$ e $B = -1/a$. Voltando na integral de partida temos

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3-a^2x+2}{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x &= \int x\,\mathrm{d}x + \int \frac{1/a}{x-a}\,\mathrm{d}x + \int \frac{(-1/a)}{x+a}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-a} - \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+a} \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{a}\ln|x-a| - \frac{1}{a}\ln|x+a| \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \end{aligned}$$

onde C é uma constante arbitrária.

9.3 Integral definida

Nesta seção vamos formalizar o conceito de integral definida, justificar que para calcular uma integral definida devemos associá-la a sua respectiva integral indefinida e mostrar que no caso da integral definida a constante de integração não se faz presente. Visto que a aplicação deste conceito, sem sombra de dúvida, reside no fato de podermos calcular áreas (também volumes) dentre outras aplicações, vamos direcionar, imediatamente após a definição e interpretação, esta seção para as aplicações.

DEFINIÇÃO 9.3.1. INTEGRAL DEFINIDA

Seja $f(x)$ uma função contínua e $y = f(x)$ a equação da curva BD, conforme Figura 9.5. No gráfico, AB é uma ordenada fixa e CP uma ordenada variável e que se move para a direita. Seja $\mathcal{A}$ a área da figura $ABCP$. Visto que a área varia com x, para um incremento em x de Δx, a área é incrementada de $\Delta\mathcal{A}$, isto é, a área de $CDQP$.

O incremento da área está compreendido entre dois retângulos. Então, comparando a área dos retângulos podemos escrever a dupla desigualdade

$$A_R(CEQP) < \Delta\mathcal{A} < A_R(FDQP).$$

Visto que os dois retângulos têm a mesma base, Δx, podemos escrever para as áreas (base vezes altura)

$$\overline{CP}\cdot\Delta x < \Delta\mathcal{A} < \overline{DQ}\cdot\Delta x$$

ou ainda, na seguinte forma

$$y\cdot\Delta x < \Delta\mathcal{A} < (y+\Delta y)\cdot\Delta x$$

que dividido por Δx fornece

$$y < \frac{\Delta\mathcal{A}}{\Delta x} < y + \Delta y.$$

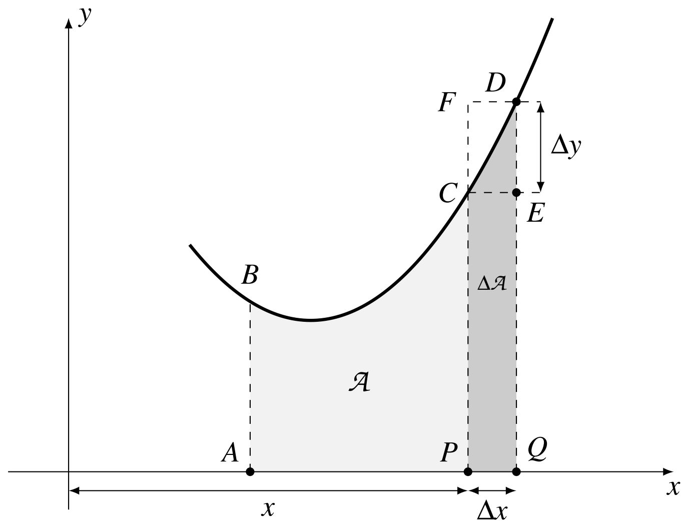


Figura 9.5: Área baixo de uma curva.

Façamos Δx tender a zero. Com isso, $y+\Delta y$ tende a y como um limite. Logo, o quociente $\Delta\mathcal{A}/\Delta x$ admite um valor entre y e "algo" que tem y como valor limitante. Então, o quociente $\Delta\mathcal{A}/\Delta x$ tende a y como um limite quando Δx tende a zero. O quociente $\Delta\mathcal{A}/\Delta x$ é interpretado como a taxa média de aumento de $\mathcal{A}$ para o intervalo Δx. Tomando o limite $\Delta x \to 0$, temos a taxa de aumento instantânea em um ponto qualquer, isto é, a derivada

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta\mathcal{A}}{\Delta x}\right)=\frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}x}.$$

Dessa expressão, concluímos que a taxa em que a área está aumentando, num ponto qualquer, é igual à ordenada desse ponto

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}x}=y=f(x)$$

ou ainda, na forma $\mathrm{d}\mathcal{A}=f(x)\,\mathrm{d}x$. Podemos dizer que essa expressão, representa um método de encontrar a área abaixo da curva, o chamado método da diferencial da área.

TEOREMA 9.3.1. DIFERENCIAL DA ÁREA

A diferencial da área ($\mathrm{d}\mathcal{A}$) limitada por uma curva, o eixo horizontal, x, uma ordenada fixa, ($\overline{AB}$), e uma ordenada variável, ($\overline{CP}$), é igual ao produto da ordenada variável, y, pela diferencial da correspondente abscissa ($\mathrm{d}x$).

Este teorema garante que se a curva BD é o lugar geométrico dos pontos de $y=f(x)$ então $\mathrm{d}\mathcal{A}=y\,\mathrm{d}x$ ou ainda $\mathrm{d}\mathcal{A}=f(x)\,\mathrm{d}x$. Integrando obtemos

$$\mathcal{A}=\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Denotemos a integral indefinida por

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+C \qquad\Longrightarrow\qquad \mathcal{A}=F(x)+C$$

onde C é uma constante e $F'(x)=f(x)$.

Para determinarmos a constante, utilizamos o fato de que para $x = a$ temos $\mathcal{A} = 0$ logo

$$0 = F(a) + C \qquad \Longrightarrow \qquad C = -F(a)$$

de onde segue

$$\mathcal{A} = F(x) - F(a).$$

Ao considerarmos a área limitada por uma curva, o eixo horizontal x, no intervalo $a \leq x \leq b$ com ordenadas fixas, relativas às abscissas, $x = a$ e $x = b$, podemos escrever

$$\mathcal{A} = F(b) - F(a).$$

TEOREMA 9.3.2. DIFERENÇA ENTRE DOIS VALORES

A diferença entre os valores de $\int y\,\mathrm{d}x$ para $x = b$ e $x = a$ fornece a área limitada pela curva cuja ordenada é y, o eixo horizontal e as ordenadas correspondentes às abscissas $x = a$ e $x = b$, supostas finitas.

A diferença mencionada no teorema anterior será representada pelo símbolo

$$\int_a^b y\,\mathrm{d}x \qquad \text{ou} \qquad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

ou seja: integral de a até b de $y\,\mathrm{d}x$, chamada integral entre dois extremos, e visto que admite sempre um valor definido é chamada de integral definida.

O cálculo de uma integral definida é imediato, após conhecido o cálculo da integral indefinida, basta calcular a diferença do valor calculado no extremo superior daquele calculado no extremo inferior.

EXEMPLO 9.8. CÁLCULO DA ÁREA

Voltemos à breve introdução. Calcular a integral definida

$$\int_0^{16} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x\cdot$$

Temos (integração de uma potência)

$$\int_0^{16} x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^{16} = \left.\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right|_0^{16} = \frac{2}{3}\left[(16)^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}\cdot 4^3 = \frac{128}{3} \text{ (unidades de área).}$$

EXEMPLO 9.9. ÁREA DO TRAPÉZIO

Determinar, utilizando integração, a área do trapézio limitado pela reta $y = 4x$, o eixo horizontal e as ordenadas $x = 1$ e $x = 3$. Compare o resultado determinando a área com a expressão conhecida, isto é, base média vezes altura.

Considere a Figura 9.6 onde denotamos a área por A.

Vamos calcular a integral definida

$$\mathsf{A} = \int_1^3 4x\,\mathrm{d}x = 4\left.\frac{x^2}{2}\right|_1^3 = 2(3^2 - 1^2) = 16 \text{ (unidades de área).}$$

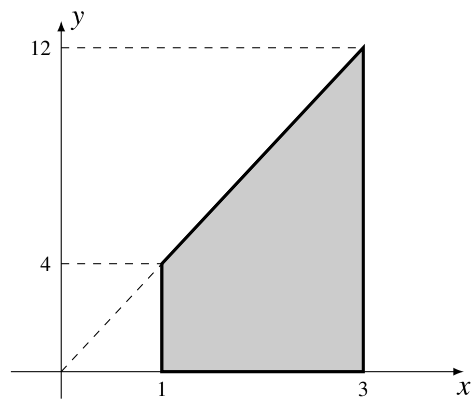


Figura 9.6: Área de um trapézio.

Por outro lado, utilizando a expressão que fornece a área de um trapézio, isto é, base maior mais base menor dividido por dois vezes altura (alternativamente, base média vezes altura) obtemos

$$\mathsf{A} = \frac{12+4}{2} \cdot 2 = 16 \text{ (unidades de área)}.$$

EXEMPLO 9.10. ÁREA DELIMITADA POR DUAS PARÁBOLAS

Determinar a área delimitada por duas parábolas $y^2 = 6x$ e $x^2 = 6y$.

Começamos por determinar os pontos em comum das parábola, isto é, as intersecções, conforme Figura 9.7

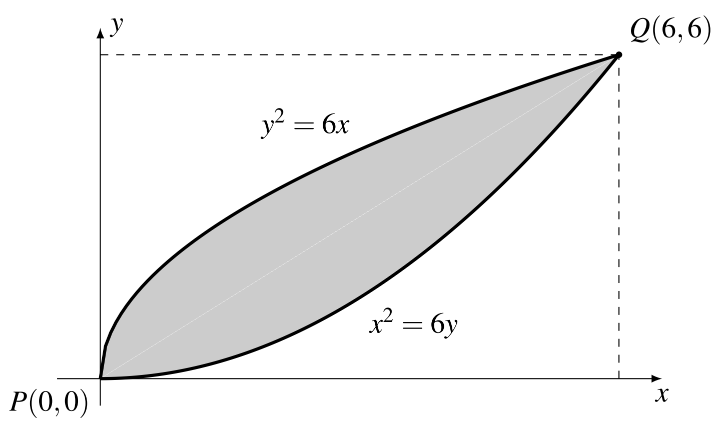


Figura 9.7: Área delimitada por duas parábolas.

Denotemos por A a área a ser determinada. Temos, então, os pontos de interseção satisfazendo a equação $x^4 = 216x$, com soluções reais dadas por $P(0,0)$ e $Q(6,6)$. Devemos calcular a diferença de duas integrais, a saber:

$$\mathsf{A} = \int_0^6 \sqrt{6x}\,\mathrm{d}x - \int_0^6 \frac{x^2}{6}\,\mathrm{d}x,$$

onde a primeira é a área delimitada pela parábola $y^2 = 6x$, com simetria horizontal, o eixo x e as paralelas ao eixo vertical em $x = 0$ e $x = 6$, enquanto a segunda é a área delimitada pela parábola $y = x^2/6$, com simetria vertical, o eixo x e as paralelas ao eixo vertical em $x = 0$ e $x = 6$.

$$\mathsf{A} = \left.\frac{\sqrt{6}x^{3/2}}{3/2}\right|_0^6 - \left.\frac{1}{6}\frac{x^3}{3}\right|_0^6 = 24 - 12 = 12 \text{ (unidades de área).}$$

9.4 Teorema fundamental do cálculo

Após o estudo das derivadas e das integrais, vamos concluir este capítulo com o teorema fundamental do cálculo que funde estes dois conceitos, isto é, em linhas gerais, esse teorema permite calcular integrais usando uma primitiva do integrando sem que precisemos achar o limite das somas.

Vamos começar a seção introduzindo o conceito de valor médio de uma função, bem como o teorema do valor médio para integrais definidas. Concluímos com o teorema fundamental do cálculo, subdividindo-o em duas partes. Imediatamente após o respectivo conceito apresentamos uma simples aplicação. As provas dos teoremas podem ser encontradas na referência [19].

9.4.1 Teorema do valor médio para integrais definidas

Primeiramente, vamos introduzir o conceito de valor médio de uma função. Após o teorema propriamente dito, discutimos aplicações. Este teorema desempenha papel crucial na demonstração do teorema fundamental do cálculo.

DEFINIÇÃO 9.4.1. VALOR MÉDIO DE UMA FUNÇÃO

Seja $f(x)$ uma função contínua ao longo do intervalo fechado $[a,b]$. Se $f(x)$ é integrável neste intervalo, definimos o seu valor médio, denotado por VM, em $[a,b]$, a partir da integral

$$\mathsf{VM}[f(x)] = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{9.2}$$

Note que, o teorema do valor médio para integrais definidas afirma que esse VM é sempre admitido pelo menos uma vez pela função no respectivo intervalo.

EXEMPLO 9.11. CÁLCULO DO VALOR MÉDIO

Determine o VM de $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ no intervalo $[-1,1]$.

Identificando com a Eq.(9.2) temos $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $a = -1$ e $b = 1$. Substituindo tais valores nessa equação, devemos calcular a seguinte integral

$$\mathsf{VM}[f(x)] = \frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x.$$

Visto que o integrando é uma função par e já simplificando, devemos calcular

$$\mathsf{VM}[f(x)] = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x.$$

Introduzindo a mudança de variável $x = \operatorname{sen}\theta$, os extremos passam a ser $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$, respectivamente, logo

$$\mathsf{VM}[f(x)] = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}\cos\theta \mathrm{d}\theta,$$

ou ainda, utilizando a relação fundamental da trigonometria, na forma

$$\mathsf{VM}[f(x)] = \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \mathrm{d}\theta.$$

Enfim, para a integral resultante, usamos a relação trigonométrica envolvendo o arco dobro, logo

$$\mathsf{VM}[f(x)] = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\mathrm{d}\theta.$$

Separando-a em duas integrais, apenas a primeira parcela contribui,

$$\mathsf{VM}[f(x)] = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{2} + \underbrace{\int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\theta}{2}\mathrm{d}\theta}_{=0} = \frac{\pi}{4}.$$

Então, o valor médio dessa função, nesse intervalo, é $\pi/4$.

TEOREMA 9.4.1. VALOR MÉDIO

Seja $x \in \mathbb{R}$. Se a função $f(x)$ for contínua no intervalo fechado $[a,b]$, então em algum ponto c em $[a,b]$ temos

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Geometricamente, este teorema assegura que existe um número c em $[a,b]$ tal que o retângulo com altura igual ao valor médio $f(c)$ da função e a base do retângulo, $(b-a)$, tem exatamente a mesma área que a região sob a curva de $f(x)$ entre a e b (área delimitada pela curva $f(x)$ o eixo x e as retas $x = a$ e $x = b$)

$$(b-a)f(c) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \equiv \text{Área}.$$

EXEMPLO 9.12. ÁREA DE UM SEMICÍRCULO

Vamos fazer uma aplicação com os dados do EXEMPLO 9.11. Identificando, temos $a = -1$, $b = 1$ e $f(c) = \frac{\pi}{4}$. Visto que é um semicírculo de raio unitário, a área é igual a $\pi/2$ unidades de área. Por outro lado, utilizando o teorema temos

$$(b-a)f(c) = (1+1)\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ (unidades de área)}$$

que é exatamente o valor da área do semicírculo de raio unitário.

TEOREMA 9.4.2. TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO – PARTE I

Seja $x \in \mathbb{R}$. Se $f(x)$ é uma função contínua no intervalo fechado $[a,b]$, então

$$F(x) = \int_a^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

é também uma função contínua no intervalo $[a,b]$ e derivável no intervalo aberto (a,b), sendo sua derivada igual a $f(x)$, isto é,

$$F'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = f(x).$$

EXEMPLO 9.13. INTEGRAL VIA TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

Considere a função dada no EXEMPLO 9.11. Utilizando o teorema fundamental do cálculo, a integral é imediata,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x \sqrt{1-\xi^2}\,\mathrm{d}\xi = \sqrt{1-x^2}.$$

Note que a derivada de uma constante é zero.

TEOREMA 9.4.3. TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO – PARTE II

Seja $x \in \mathbb{R}$. Se a função $f(x)$ é contínua em qualquer ponto do intervalo fechado $[a,b]$ e se a função $F(x)$ é qualquer primitiva de $f(x)$ em $[a,b]$ então

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Este teorema assegura que podemos calcular integrais definidas sem precisar calcular limites de somas. Para tal, basta calcular uma primitiva e substituir os valores dos extremos de integração, superior e inferior e subtrair esses valores.

EXEMPLO 9.14. ESBOÇO DO GRÁFICO E CÁLCULO DA ÁREA

Cuidado ao calcular áreas nos casos em que $f(x) < 0$. Neste caso, integramos $f(x)$ ao longo de cada subintervalo (positivo e negativo) e somamos os valores absolutos das integrais calculadas.

Considere a função $f(x) = x^3 - 3x$ no intervalo $-2 \leq x \leq 2$. a) Esboçar o gráfico destacando, máximo, mínimo e inflexão, se houver. b) Calcule a área da região delimitada pelo eixo x e o gráfico da função.

a) Ver Figura 9.8.

O ponto $(-1,2)$ é um ponto de máximo; o ponto $(1,-2)$ é um ponto de mínimo e o ponto $(0,0)$ é um ponto de inflexão. Certifique-se!

b) Devemos calcular as integrais $\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ e $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$. Como, por simetria, as áreas são iguais (uma delas está abaixo do eixo x), a área procurada é tal que

$$\mathsf{A} = 2\int_{-2}^{0}(x^3-3x)\,\mathrm{d}x = 2\left(\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2}\right)\Bigg|_{x=-2}^{x=0} = 4$$

ou seja, a área procurada é igual a 4 unidades de área.

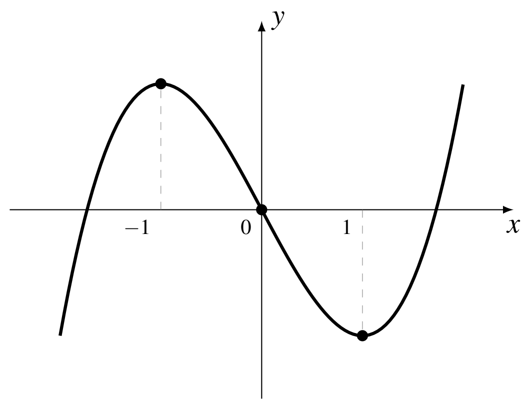


Figura 9.8: Esboço do gráfico $f(x) \times x$. Máximo, mínimo e inflexão.

EXEMPLO 9.15. COMPRIMENTO DE ARCO

Como mais uma aplicação do conceito de integral, vamos apresentar uma expressão para calcular o comprimento de uma curva regular entre dois pontos cujas abscissas são conhecidas.

Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $y = f(x)$ uma curva regular. O comprimento de arco, denotado por s, de uma curva regular $y = f(x)$, compreendido entre pontos cujas abscissas são $x = a$ e $x = b$ é dado por

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x \tag{9.3}$$

A fim de mostrar essa expressão, consideramos a Figura 9.9.

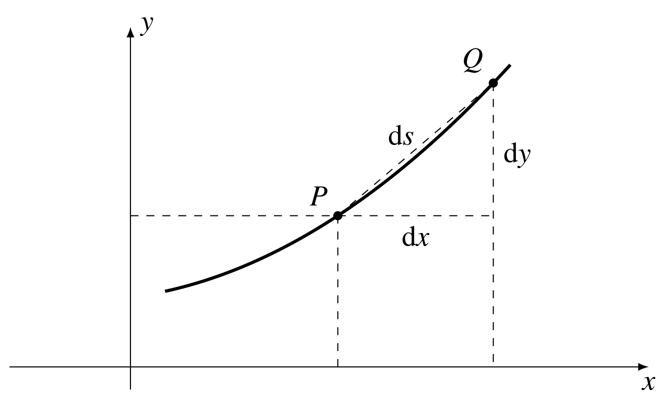


Figura 9.9: Comprimento de arco.

Sejam P e Q dois pontos infinitamente próximos. Traçamos uma paralela ao eixo vertical passando por Q e uma paralela ao eixo horizontal passando por P de modo que tenhamos um 'triângulo' retângulo. Denotando por $\mathrm{d}s$ o comprimento do elemento de arco $\widehat{AB}$ e usando o teorema de Pitágoras, temos

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2$$

que pode ser escrito na seguinte forma

$$\mathrm{d}s = \mathrm{d}x \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}.$$

Integrando de ambos os lados do ponto $x = a$ até $x = b$ e denotando por s o comprimento do arco obtemos exatamente a expressão dada pela Eq.(9.3).

Vamos concluir o capítulo, calculando o comprimento da curva chamada astroide, bem como a área por ela delimitada. Note que, para curvas mais simples, por exemplo, uma circunferência, esse cálculo é imediato, nesse caso $2\pi r$, unidades de comprimento, onde r é o raio da circunferência.

EXEMPLO 9.16. COMPRIMENTO DE UMA ASTROIDE E ÁREA POR ELA DELIMITADA

Antes de calcularmos o comprimento da astroide, vamos defini-la como uma particular hipocicloide com quatro cúspides [5].

DEFINIÇÃO 9.4.2. HIPOCICLOIDE COM QUATRO CÚSPIDES

Uma hipocicloide com quatro cúspides é a curva plana descrita por um ponto fixo de uma circunferência que rola, sem deslizar, sobre outra circunferência fixa no mesmo plano, e internamente a ela. Quando o raio da circunferência interna é um quarto do raio da circunferência fixa, essa curva recebe, também, o nome de astroide ou ainda tetracúspide.

A equação da astroide, que foi obtida por Leibniz, em coordenadas cartesianas é dada por

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

onde a é o raio da circunferência, distância do centro das coordenadas ao cúspide, conforme Figura 9.10.

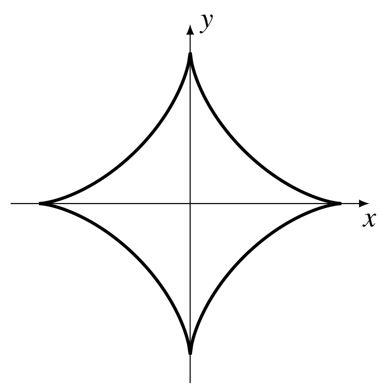


Figura 9.10: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Hipocicloide (astroide).

Introduzindo o parâmetro t, a equação da astroide, em coordenadas cartesianas, passa a ser escrita na forma paramétrica,

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\,\mathrm{sen}^3\, t. \end{cases}$$

Vamos calcular o comprimento da astroide. Para tal, começamos por calcular $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$. Derivando implicitamente a equação da astroide, em coordenadas cartesianas, obtemos

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$

que, isolando $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ fornece

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Substituindo na expressão que fornece o comprimento do arco temos

$$s = 4\int_0^a \sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}}\,\mathrm{d}x$$

onde o fator 4 diz respeito à simetria, isto é, basta calcular o comprimento de um dos 'lados' da astroide e multiplicar por 4. Essa equação pode ser escrita na forma

$$s = 4\int_0^a a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = 4a^{\frac{1}{3}}\left.\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right|_{x=0}^{x=a} = 6a$$

isto é, o comprimento da astroide é igual a $6a$ unidades de comprimento.

Passemos, agora, a calcular a área delimitada pela astroide. Denotando a área delimitada pela astroide de A, devemos calcular a seguinte integral

$$\mathsf{A} = 4\int_0^a (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x.$$

O fator multiplicativo 4 tem a mesma interpretação do cálculo do comprimento, isto é, devido a simetria da figura. Essa integral pode ser calculada através do conceito de função gama de maneira mais simples, porém esse conceito foge do escopo do presente livro [5]. Vamos introduzir algumas mudanças de variáveis a fim de atingir nosso objetivo, isto é, obter a área delimitada pela astroide. Primeiramente, consideramos $x = at$ na integral, que nos conduz à seguinte integral

$$\mathsf{A} = 4a^2\int_0^1 (1-t^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

Introduzimos a nova mudança de variável $y = \xi^3$ de onde podemos escrever

$$\mathsf{A} = 12a^2\int_0^1 (1-\xi^2)^{\frac{3}{2}}\xi^2\,\mathrm{d}\xi$$

que, a partir da mudança $\xi = \operatorname{sen}\theta$, no leva à integral

$$\mathsf{A} = 12a^2\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta\,\operatorname{sen}^2\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

Essa integral podia ter sido obtida diretamente da equação escrita na forma paramétrica, porém optamos por fazer uma sequência de mudanças de variáveis, em particular, visando uma simples revisão.

Para a integral resultante, basta utilizarmos as relações trigonométricas envolvendo o seno e o cosseno do arco dobro de onde segue, finalmente,

$$\mathsf{A} = \frac{3}{8}\pi a^2$$

unidades de área.

9.5 Integrais impróprias

Quando introduzimos o conceito de integral definida, exigimos que o intervalo de integração fosse finito, bem como a continuidade da função a ser integrada. Ainda assim, se este não é o caso, podemos ter integrais que não satisfazem essas exigências. Se um ou ambos os limites de integração são infinitos e/ou a função a ser integrada possui uma descontinuidade no intervalo, temos as chamadas integrais impróprias. Tais integrais devem ser calculadas, se existirem, através de um conveniente limite, no seguinte modo: calcula-se a respectiva integral definida e toma-se o limite.

EXEMPLO 9.17. INTEGRAL COM UM DOS EXTREMOS INFINITO

Seja $a \in \mathbb{R}$. A integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}$ é uma integral imprópria, pois um dos limites (no caso, o limite superior) é infinito e deve ser calculada como

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}$$

isto é, um limite de uma integral definida. Se o limite existir (for finito) dizemos que a integral imprópria é convergente, caso contrário, divergente.

Introduzindo a mudança de variável $x = a\tan\theta$ obtemos

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \lim_{b\to\infty}\int_0^{\arctan(b/a)} \frac{a\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta}{a^2\tan^2\theta+a^2} = \lim_{b\to\infty}\int_0^{\arctan(b/a)} \frac{\mathrm{d}\theta}{a}$$

de onde segue, usando a relação trigonométrica $1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$,

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\lim_{b\to\infty}\arctan(b/a) = \frac{\pi}{2a}\cdot$$

EXEMPLO 9.18. INTEGRAL COM INTEGRANDO QUE PODE SER INFINITO

Seja $a > 0$. Calcule, se existir a integral $\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{\mathrm{d}x}{x+1}$. Essa integral também deve ser considerada uma integral imprópria, pois $x=-1$ é um zero do denominador do integrando, isto é, o integrando tem uma descontinuidade em $x=-1$. Vamos dividir em dois casos, a saber: (i) Seja $0<a<1$. Nesse caso, não temos problema e a integral é imediata, resultando em

$$\int_{-a}^{a}\frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \ln\left(\frac{1+a}{1-a}\right).$$

(ii) Seja $a \geq 1$. Neste caso a integral é imprópria e deve ser calculada como

$$\int_{-a}^{a}\frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \lim_{b\to-1}\int_{-a}^{b}\frac{\mathrm{d}x}{x+1} + \lim_{b\to-1}\int_{b}^{a}\frac{\mathrm{d}x}{x+1}$$

com $-a<b<a$, desde que os limites no membro à direita existam. O resultado é o mesmo que no intervalo $0<a<1$, enquanto para $a=1$ a integral é divergente.

Em geral, no caso de integrais impróprias podemos ter:

(a) Se a função $f(x)$ é contínua no intervalo $[a,\infty)$ com $a\in\mathbb{R}$, então

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

desde que o limite exista. Se este for o caso, a integral é convergente, caso contrário, divergente.

Em analogia ao caso anterior temos, em relação ao limite inferior.

(b) Se a função $f(x)$ é contínua no intervalo $(-\infty, a]$ com $a \in \mathbb{R}$, então

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to-\infty} \int_{b}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$$

desde que o limite exista e com a mesma conclusão, isto é, a integral é convergente, caso contrário, divergente.

(c) Se a função $f(x)$ é contínua no intervalo $(-\infty, \infty)$, então

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

com $c \in \mathbb{R}$. Neste caso, para a integral à esquerda existir, os dois limites à direita devem existir, caso contrário, ou um deles ou os dois não existir, a integral é divergente. Note que recai em um dos casos anteriores.

EXEMPLO 9.19. CUSTO CAPITALIZADO

Chama-se custo capitalizado ao valor presente de uma alternativa que durará indefinidamente. Por exemplo, os gastos com projetos governamentais do tipo, construção de pontes e ferrovias, por um período de tempo muito longo, indefinido ou infinito [3].

Seja $C(r,n)$ o custo capitalizado de um ativo, dado por

$$C(r,n) = C_0 + \int_0^n C(t)\, e^{-rt}\,\mathrm{d}t$$

onde C_0, uma constante, o investimento inicial; r a taxa anual, admitindo juros compostos continuamente; t é o tempo, em anos, e $C(t)$ é o custo de manutenção. a) Determinar o custo capitalizado de um ativo por 35 anos para um investimento inicial de R\$5.000,00, com custo de manutenção de R\$1.000,00 a uma taxa de 10% ao ano. b) Admita um tempo tão grande quanto se queira ('para sempre') e compare com o resultado do item anterior.

a) Substituindo os dados na expressão temos

$$C(10,35) = 5000 + \int_0^{35} 1000\, e^{-0,1t}\,\mathrm{d}t.$$

Integrando, podemos escrever

$$C(10,35) = 5000 + 10000[1 - \exp(-3,5)].$$

Utilizando o resultado $\exp(-3,5)] \simeq 0,0302$ obtemos R\$ 14.698,00.

b) Neste caso, devemos calcular a integral imprópria

$$C(10,\infty) = 5000 + \int_0^{\infty} 1000\, e^{-0,1t}\,\mathrm{d}t,$$

de onde segue R\$15.000,00.

EXEMPLO 9.20. CALCULAR A ÁREA DELIMITADA PELA CURVA DE AGNESI

Na Figura 6.16 temos que o eixo horizontal é uma assíntota e a função $y = a^3/(x^2+a^2)$ é par. Então, denotando a área por A, devemos calcular o limite

$$A = \lim_{b\to\infty} 2\int_0^b \frac{a^3}{x^2+a^2}\mathrm{d}x$$

cuja interpretação é a área delimitada pela curva e o eixo horizontal.

Introduzindo a mudança de variável $x = a\tan\theta$ temos $\mathrm{d}x = a\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$. Para os limites de integração temos: $x = 0$ implica $\theta = 0$ enquanto $x = b$ implica $\theta = \arctan(b/a)$, logo podemos escrever para a área

$$A = 2a^3 \lim_{b\to\infty}\int_0^{\arctan(b/a)} \frac{a\sec^2\theta}{a^2+a^2\tan^2\theta}\mathrm{d}\theta\cdot$$

Utilizando a relação trigonométrica $\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta$ e simplificando obtemos

$$A = 2a^2\lim_{b\to\infty}[\arctan(b/a)]\cdot$$

Enfim, calculando o limite temos $A = \pi a^2$ unidades de área.

9.6 Exercícios

1. Calcule as integrais indefinidas

$$\text{a)}\quad \int 2019\cdot x^{2018}\,\mathrm{d}x \qquad \text{e} \qquad \text{b)}\quad \int \sqrt[3]{x^2}\,\mathrm{d}x$$

2. Calcule as integrais indefinidas

$$\text{a)}\quad \int e^{2x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{e} \qquad \text{b)}\quad \int \operatorname{sen} 3x\,\mathrm{d}x$$

3. Utilize o método de substituição para calcular as integrais

$$\text{a)}\quad \int x e^{x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{e} \qquad \text{b)}\quad \int x e^{x^2} e^{e^{x^2}}\,\mathrm{d}x$$

4. Utilize a expressão do arco dobro, mudança de variável e integração por partes para calcular a integral

$$\int e^{\operatorname{sen} x}\operatorname{sen} 2x\,\mathrm{d}x.$$

5. Calcule as integrais utilizando integração por partes

$$\text{a)}\quad \int x^2\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x \qquad \text{b)}\quad \int x^2\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$\text{c)}\quad \int e^x\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x \qquad \text{d)}\quad \int x e^{x^2}\cos x^2\,\mathrm{d}x$$

6. Calcule as integrais

$$\text{a)} \quad \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \mathrm{d}x \qquad \text{e} \qquad \text{b)} \quad \int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos^2 x} \mathrm{d}x$$

7. Utilize frações parciais para mostrar que

$$\int \frac{x^5+x^4+2}{x^3+x^2-x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}+x+\frac{1}{x+1}+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$$

onde C é uma constante arbitrária.

8. Utilize a substituição $\tan(x/2)=\xi$ para mostrar que

$$\int \csc x\,\mathrm{d}x \equiv \int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sen} x} = \ln|\tan(x/2)|+C$$

onde C é uma constante arbitrária. Essa substituição converte uma integral envolvendo funções trigonométricas em integrais envolvendo funções algébricas.

9. Utilize a mesma substituição do exercício anterior para mostrar que

$$\int \sec x\,\mathrm{d}x \equiv \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \ln|\sec x+\tan x|+C$$

onde C é uma constante arbitrária.

10. Utilize a substituição $x=t^2$ para mostrar que

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2} = -\frac{2}{\sqrt{x}+1}+C$$

onde C é uma constante arbitrária.

11. Utilize frações parciais para mostrar o resultado

$$\int \frac{2x+3}{x^3+x^2-2}\,\mathrm{d}x = \ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+C$$

onde C é uma constante arbitrária.

12. Com a substituição $e^x=t$ mostre que

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2-\tanh x} = \frac{1}{3}\ln\left(e^{3x}+3\,e^x\right)+C$$

onde C é uma constante arbitrária.

13. Calcule as integrais definidas

$$\text{a)} \quad \int_{2018}^{2019} \mathrm{d}x \qquad \text{e} \qquad \text{b)} \quad \int_{20}^{19} (-\mathrm{d}x).$$

14. Calcule as integrais definidas

$$\text{a)} \quad \int_{-1}^{1} \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{e} \qquad \text{b)} \quad \int_{0}^{2} \sqrt[4]{8x}\,\mathrm{d}x.$$

15. Calcule as integrais definidas

$$\text{a)} \quad \int_{1}^{2} \ln x\,\mathrm{d}x \qquad \text{e} \qquad \text{b)} \quad \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x.$$

16. Calcule as integrais definidas

$$\text{a)} \quad \int_{0}^{1} \tan x\,\mathrm{d}x \qquad \text{e} \qquad \text{b)} \quad \int_{1}^{\pi/2} \cot x\,\mathrm{d}x.$$

17. Calcule as integrais definidas

$$\text{a)} \quad \int_{0}^{\pi} x \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x \qquad \text{e} \qquad \text{b)} \quad \int_{0}^{\pi/4} \sec^2 x\,\mathrm{d}x.$$

18. Calcule as integrais definidas

$$\text{a)} \quad \int_{0}^{\ln 2} x e^{x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{e} \qquad \text{b)} \quad \int_{0}^{1} x e^{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

19. Calcule a área total delimitada pela curva $y = \operatorname{sen} 2x$ e o eixo horizontal para $0 \leq x \leq 2\pi$.

20. Calcule a área total entre a curva $y = \sqrt[3]{x} - x$ e o eixo horizontal no intervalo $-1 \leq x \leq 8$.

21. Calcule os seguintes limites

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^3} \int_{0}^{x} \frac{\xi^3}{\xi^4+1}\,\mathrm{d}\xi \right) \qquad \text{e} \qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{x^3} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\int_{0}^{x} \frac{\xi^3}{\xi^4+1}\,\mathrm{d}\xi \right) \right]$$

22. Calcule a área delimitada pela elipse de equação

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

23. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$. Calcule a área delimitada pela elipse de equação

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1\cdot$$

24. Calcule, se possível, as integrais impróprias.

$$\text{a)} \quad \int_{-\infty}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-x}} \qquad \text{b)} \quad \int_{1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\text{c)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{d)} \quad \int_{2}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\,\mathrm{d}x$$

25. Calcule, se possível, as integrais impróprias.

$$\text{a)}\ \int_{-\infty}^{0} e^x\,\mathrm{d}x \qquad \text{b)}\ \int_{\infty}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

$$\text{c)}\ \int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \qquad \text{d)}\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}, \quad a \in \mathbb{R}^*$$

26. Mostre que

$$\int_0^1 \frac{x^3}{1+x}\mathrm{d}x = \frac{5}{6} - \ln 2.$$

27. Mostre que $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln(Ax)$ onde A é uma constante. Note que, sendo, no integrando, o numerador igual a diferencial do denominador, temos que a integral é o logaritmo natural do denominador.

28. Mostre que $\displaystyle\int \cot x\,\mathrm{d}x = \ln|\operatorname{sen} x| + C$ onde C é uma constante de integração.

29. Mostre que $\displaystyle\int \sec x\,\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$ onde C é uma constante de integração.

30. Mostre que $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2 x}{1+\tan x}\mathrm{d}x = \ln 2.$

31. Mostre que $\displaystyle\int \frac{2\,\mathrm{d}x}{x^2+2x+5} = \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$ onde C é uma constante de integração.

32. Mostre que $\displaystyle\int \frac{2\,\mathrm{d}x}{x^2+4x+3} = \ln\left(\frac{x+1}{x+3}\right) + C$ onde C é uma constante arbitrária.

33. Mostre que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \cos^5 x\,\mathrm{d}x = \frac{8}{105}.$

34. Mostre que $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$ onde C é uma constante arbitrária.

35. A aceleração de uma partícula que se move com velocidade variável $v(t)$ é $-bv^2(t)$ onde b é uma constante positiva. Determine a equação da velocidade sabendo que a velocidade inicial é $v(0) = v_0$.

36. Mostre que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$

37. Justifique se o resultado $\displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2} = -2$ está correto.

38. Calcule a integral $\displaystyle\int_0^{\infty} 2xe^{-x^2}\mathrm{d}x.$

39. Calcule a integral $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x.$

40. Determine a área delimitada pela parábola $y = x^2 + 1$ e a corda que une os pontos $P(-2,5)$ e $Q(2,5)$.

41. Mostra-se que o volume do sólido gerado pela revolução, denotado por V, em torno do eixo das abscissas, da área delimitada pela curva, o eixo das abscissas e as retas $x = a$ e $x = b$ é dado por

$$V = \pi \int_a^b y^2 \, \mathrm{d}x$$

sendo y uma função de x, dado pela equação da curva. Em completa analogia, quando o eixo de revolução é o eixo das ordenadas, temos para o volume

$$V = \pi \int_c^d x^2 \, \mathrm{d}y.$$

Determine o volume da esfera gerada pela revolução da circunferência $x^2 + y^2 = r^2$ em torno de um diâmetro.

42. A área da superfície de revolução, denotada por A, gerada pela revolução do arco $\overline{AB}$ em torno do eixo das abscissas é dado por

$$A = 2\pi \int_a^b y \left[1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x$$

ou ainda, expressa em termos do comprimento de arco, $\mathrm{d}s$,

$$A = 2\pi \int_a^b y \, \mathrm{d}s.$$

Analogamente, se o eixo de revolução é o eixo das ordenadas temos

$$A = 2\pi \int_c^d x \, \mathrm{d}s$$

sendo o comprimento de arco dado por uma das expressões

$$\mathrm{d}s = \left[1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x = \left[1 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}y.$$

Mostre que a área da superfície, gerada pela revolução da hipocicloide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, em torno do eixo das abscissas, é

$$A = \frac{12\pi a^2}{5}$$

unidades de área.

43. Mostre que $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + \operatorname{sen} x + \cos x} = \ln\left(1 + \tan\frac{x}{2}\right) + C$ onde C é uma constante arbitrária.

44. Calcule a integral $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}}{4 - 3\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{7}}$.

45. Determine $f(x)$ sabendo que $f'(x) = -3x^2 + 1$ e $f(2) = 12$.

46. Determine, se possível, os valores de $a > 0$ de modo que tenhamos

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

para: a) $f(x) = x^2 - 3x$ e b) $f(x) = x\,\mathrm{sen}\,x$.

47. Sendo $f(x) = \displaystyle\int_1^x \mathrm{sen}\,x\,\mathrm{d}x$, calcule $f'(x)$ e $f''(x)$.

48. Utilize o teorema fundamental do cálculo para obter

$$\text{a)} \quad \int_0^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x \qquad \text{e} \qquad \text{b)} \quad \int_0^{\pi/4} \sec^2 x\,\mathrm{d}x.$$

49. Calcule a área delimitada pelas parábolas: $y = 3x^2$ e $y = 12 - x^2$.

50. Mostre que

$$2\int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}^4\,\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi} \cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{3\pi}{8}\cdot$$

51. A aceleração de uma partícula é dada por $a = -5 + 2\,\mathrm{sen}\,2t$. Se a partícula parte do repouso, $v(0) = 0$, e da origem dos espaços, $s(0) = 0$, determine a equação horária.

52. Calcule a área delimitada pela hipérbole de equação $y \cdot x = 1$, o eixo horizontal e as ordenadas correspondentes às abscissas $x = 1$ e $x > 1$.

53. (MIT2005) Calcule a integral $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2 - 4x}}\mathrm{d}x$.

54. (MIT2005) Calcule os limites

$$\text{a)} \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^5 - 1}, \quad \text{b)} \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{senh}\,x}{\mathrm{sen}\,x}, \quad \text{c)} \lim_{x\to 0^+} [1 - \cos(\sqrt{x})]^{\mathrm{sen}\,x}$$

55. (MIT2005) Calcular as integrais

$$\text{a)} \quad \int_1^{\infty} t\,e^{-t^2}\mathrm{d}t \qquad \text{e} \qquad \text{b)} \quad \int_{0^+}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^s} \qquad \begin{cases} s > 1 \\ 0 < s < 1 \end{cases}$$

56. (MIT2005) Calcular a integral

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t^{2/3}(1 + t^{2/3})}\cdot$$

57. (MIT2005) Calcular a integral

$$\int_0^{\pi/4} \tan^2\theta\,\mathrm{d}\theta\cdot$$

58. (MIT2005) Calcular a integral

$$\int_{-2}^0 \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 4x + 8}\cdot$$

59. (MIT2005) Calcular a integral
$$\int_{-10e^{\pi}}^{10e^{\pi}} \frac{x}{\sqrt{1+x^{10}}}\mathrm{d}x\cdot$$

60. (MIT2005) Calcular a integral
$$\int_{1}^{2} x(\ln x)^2\mathrm{d}x\cdot$$

61. Determinar o comprimento da curva a seguir, no intervalo especificado
$$y=\frac{1}{3}(x^2+2)^{3/2}, \qquad 0\leq x\leq 1\cdot$$

62. Determinar o comprimento da curva a seguir, no intervalo especificado
$$y=\int_{-2}^{x}\sqrt{t^4-1}\mathrm{d}t, \quad -2\leq x\leq -1\cdot$$

63. Calcule a integral $\displaystyle\int_0^1 x(2x^2-1)^{10}\mathrm{d}x$.

64. Calcule a integral $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos(2\theta)\mathrm{d}\theta$.

65. Calcule a integral $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \mathrm{e}^x \ln(\mathrm{e}^x+1)\mathrm{d}x$.

66. Calcule a integral $\displaystyle\int_1^3 x^4 \ln x\,\mathrm{d}x$.

67. Calcule a integral $\displaystyle\int_4^5 \left[\frac{24x^3(x-3)}{(x-1)(2x+1)}\right]\mathrm{d}x$.

68. Calcule a interal $\displaystyle\int_0^{1/2} \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x$.

69. Calcule a integral $\displaystyle\int_0^2 \left[\frac{2x}{(x-3)^2}\right]\mathrm{d}x$.

70. Calcule a integral $\displaystyle\int_0^{\pi} x \,\mathrm{sen}\, x\,\mathrm{d}x$.

71. Calcule a integral $\displaystyle\int_1^2 \left[\frac{4}{x(x^2+4)}\right]\mathrm{d}x$.

72. Determine a área delimitada pela parábola $y=3x^2+1$ e as retas $x=-1$ e $x=3$.

73. Determine a área delimitada pela parábola $y=(x-1)(x-3)$ e o eixo horizontal x para $0\leq x\leq 4$.

74. Determine a área delimitada pela curva $y=-4+x^2$ e o eixo x.

75. Determine a área compreendida entre as curvas $y=x^2-2x$ e $y=-x+2$.

76. Determine a área compreendida entre as curvas $y = x^2$, $y = x+6$, $x = 0$ e $x = 5$.

77. Determine a área limitada pelo gráfico de $y = x^3$ e pelas retas $x = -1$ e $x = 1$.

78. Determine a área delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = x+2$.

79. Determine a área limitada pelas curvas $x+y = 4$, $x-y = 0$ e $y+3x = 4$.

80. Determine a área limitada pelo gráfico de $y = x^3 - x$ e o eixo horizontal x com $0 \leq x \leq 2$.

81. Use a primeira parte do teorema fundamental do cálculo para obter a derivada das funções

$$\text{a)} \quad f(x) = \int_3^x \frac{1}{t+t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{e} \qquad \text{b)} \quad g(x) = \int_x^2 \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$$

82. Use a primeira parte do teorema fundamental do cálculo para obter a derivada das funções

$$\text{a)} \quad f(x) = \int_2^x \sqrt{t+4}\,\mathrm{d}t \qquad \text{e} \qquad \text{b)} \quad h(y) = \int_y^3 \left(\frac{2x}{x^2+9}\right)\mathrm{d}x$$

83. Calcule o limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^x \cos(t^2)\,dt}{\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t}.$$

84. Obtenha uma função f e um número a tal que

$$6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2}\,dt = 2\sqrt{x}$$

para todo $x > 0$.

85. Mostre os resultados

$$\text{a)} \quad \int \operatorname{senh} x\,\mathrm{d}x = \cosh x + C \qquad \text{e} \qquad \text{b)} \quad \int \cosh x\,\mathrm{d}x = \operatorname{senh} x + C$$

onde C é uma constante arbitrária.

86. Mostre que

$$\int \tanh x\,\mathrm{d}x = \ln\cosh x + C$$

onde C é uma constante.

87. Mostre os resultados

$$\text{a)} \int \operatorname{senh}^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\operatorname{senh} 2x - \frac{x}{2} + C \quad \text{e} \quad \text{b)} \int \cosh^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\operatorname{senh} 2x + \frac{x}{2} + C$$

onde C é uma constante.

88. Calcule a integral

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-9}}.$$

89. Calcule a integral
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}.$$

90. (Limiar de excitação da retina [1].) Quando uma área circular da retina é uniformemente sensibilizada por uma fonte luminosa, a excitação máxima das fibras nervosas ocorre no centro. Deve-se isso ao fato de que as excitações periféricas (fora do centro) se somam para aumentar o efeito central. Neste caso, a contribuição de um pequeno elemento de área ΔA sensibilizado sobre a excitação central é inversamente proporcional a r^k, onde r é a distância do centro de ΔA ao centro da região maior e k é uma constante positiva menor que 2. Define-se a *excitação central total* por
$$E = \beta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R \left(\frac{r}{r^k}\right) \mathrm{d}r$$
onde R é o raio da área circular sensibilizada, β é uma constante de proporcionalidade positiva, a qual depende também da intensidade de luz incidente. Mostre que
$$E = \frac{2\pi\beta}{2-k} R^{2-k}.$$

9.6.1 Respostas e/ou sugestões

1. a) $x^{2019} + C$; b) $\frac{3}{5}x^{5/3} + C$ com C uma constante.
2. a) $e^{2x}/2 + C$; b) $-\cos 3x/3 + C$ com C uma constante.
3. a) $e^{x^2}/2 + C$; b) $e^{e^{x^2}}/2 + C$ com C uma constante.
4. $2(\operatorname{sen} x \cdot e^{\operatorname{sen} x} - e^{\operatorname{sen} x}) + C$ com C uma constante.
5. a) $(-x^2+2)\cos x + 2x \operatorname{sen} x + C$; b) $(x^2-2)\operatorname{sen} x + 2x\cos x + C$; c) $e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)/2 + C$; d) $e^{x^2}(\operatorname{sen} x^2 + \cos x^2)/3 + C$ com C uma constante.
6. a) $-x + \tan x + C$; b) $-2\ln|\cos x| + C$ com C uma constante.
7. Após escrever a fração como uma soma
$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-1}$$
determine as constantes A, B e C.
8. Utilizando relações trigonométricas, expresse a função $\operatorname{sen} x$ em função de ξ a fim de obter uma integral algébrica.
9. Análogo ao anterior.
10. Direto da substituição proposta.
11. Escreva o integrando na forma
$$\frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+2x+2}.$$

12. Utilize a relação $\tanh x = (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x})$ e após frações parciais.

13. a) 1; b) 1.

14. a) 0; b) 4.

15. a) $1 + 2\ln 2$; b) 1.

16. a) a) $\ln\cos 1$; b) $-\ln \operatorname{sen} 1$.

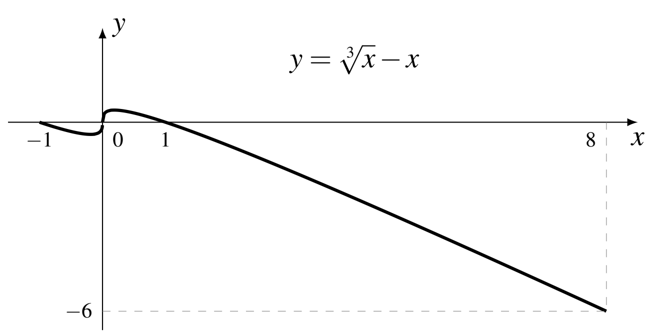
17. a) π; b) 1.

18. a) $2\ln 2 - 1$; b) $(e-1)/2$.

19. Cuidado! Porção da curva abaixo do eixo horizontal. Calcular a integral como (simetria)

$$4\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 2x \, \mathrm{d}x.$$

20. Esboço do gráfico.



21. a) Utilize a regra de l'Hôpital a fim de mostrar que a integral é zero. b) Utilize o teorema fundamental do cálculo para mostrar que a integral é um.

22. Por simetria, calcular a integral

$$4\int_0^6 \frac{2}{6}\sqrt{36 - x^2}\, \mathrm{d}x$$

a fim de mostrar que a área é 12π unidades de área.

23. $\pi\alpha\beta$.

24. a) Diverge; b) Diverge; c) Diverge; d) Diverge.

25. a) 1; b) -1; c) $\pi/2$; d) $2\pi/a$.

26. Utilize frações parciais.

27. Introduza a constante de integração na forma $C = \ln A$.

28. Introduza a mudança de variável $\operatorname{sen} x = t$.

29. Escreva $\sec x = (\sec x \tan x + \sec^2 x)/(\sec x + \tan x)$ e introduza a mudança $\sec x + \tan x = t$.

30. Introduza a mudança de variável $1 + \tan x = t$.

31. Force um quadrado perfeito e utilize uma conveniente substituição trigonométrica.

32. Utilize frações parciais.

33. Introduza a mudança de variável $\operatorname{sen} x = t$ e use a relação fundamental da trigonometria.

34. Introduza a mudança de variável $\operatorname{sen} x = t$.

35. Escreva $\mathrm{d}v = -bv^2\,\mathrm{d}t$ de modo a obter $1/v = 1/v_0 + bt$.

36. Introduza a mudança de variável $\tan\theta = x$.

37. Não, não está correto, pois $x = 1$ é uma descontinuidade pertencente ao intervalo $[0,2]$.

38. 1.

39. Introduza a mudança de variável $x = 2\operatorname{sen} t$ para mostrar que a integral é igual a π.

40. $32/3$ unidades de área.

41. $4\pi r^3/3$ unidades de volume.

42. Expresse $\mathrm{d}s = (a/x)^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x$ e calcule a integral $A = 2\pi\int_0^a y\,\mathrm{d}s$.

43. Introduza a mudança de variável $\tan(x/2) = t$.

44. Introduza a mudança de variável $\tan(x/2) = t$.

45. $f(x) = -x^3 + x - 18$.

46. a) $a = 9/2$ e b) a deve satisfazer a equação $\tan a = a$.

47. $f'(x) = \operatorname{sen} x$ e $f''(x) = \cos x$.

48. a) Zero e b) 1.

49. $64/3$ unidades de área.

50. Utilize as expressões para o arco metade.

51. Integre duas vezes de modo a obter $s(t) = t - \frac{5}{2}t^2 - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t$.

52. $\ln x$.

53. Introduza $x = 2 + 2\cosh x$ de modo a obter $\sqrt{x^2 - 4x} + \operatorname{arcosh}(x-2)/2 + C$, onde C é uma constante arbitrária.

54. a) Zero ; b) 1 ; c) Usar o fato que o logaritmo do limite é o limite do logaritmo e use duas vezes a regra de l'Hôpital para mostrar que o limite é igual a 1.

55. a) $1/2e$; b) Para $s \geq 1$ diverge e para $0 < s < 1$ é $1/1 - s$.

56. Introduza $t^{\frac{1}{3}} = \tan\theta$ para obter $3(\arctan\sqrt[3]{2} - \pi/4) + C$ onde C é uma constante arbitrária.

57. Utilize a relação fundamental para obter $(4-\pi)/4$.

58. Introduza $x+2 = 2\tan\theta$ a fim de obter para a integral $\pi/8$.

59. Zero. O integrando é uma função ímpar e o intervalo é simétrico.

60. Introduza $\ln x = t$ e depois duas vezes integração por partes a fim de obter para a integral $2\ln^2 2 - 2\ln 2 + 3/4$.

61. Direto da definição para obter $4/3$ unidades de comprimento.

62. Use o teorema fundamental do cálculo para obter $7/3$ unidades de comprimento.

63. $1/22$.

64. $1/2$.

65. $-1-\ln(27/4)$.

66. $(243/5)\ln 3 - 242/25$.

67. $100 - 32\ln 2 + 23\ln 3 - (7/2)\ln 11$.

68. $1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

69. $4 - \ln 9$.

70. π.

71. $(1/2)\ln(5/2)$.

72. 32 unidades de área.

73. 4 unidades de área.

74. $32/3$ unidades de área.

75. $9/2$ unidades de área.

76. $157/6$ unidades de área.

77. $1/2$ unidades de área.

78. $9/2$ unidades de área.

79. 2 unidades de área.

80. $5/2$ unidades de área.

81. a) $1/(x+x^3)$; b) $-\cos(x^2)$.

82. a) $\sqrt{x+4}$; b) $-2y/(y^2+9)$.

83. 1.

84. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ e $a = 9$.

85. a) Direto da definição; b) Direto da definição.

86. Escreva a tangente hiperbólica como o quociente do seno e cosseno hiperbólicos.

87. a) Utilize a expressão para o seno do arco dobro. b) Utilize a expressão para o cosseno do arco dobro.

88. Introduza a mudança $x = 3\cosh t$ a fim de obter $\operatorname{arcsh}(x/3) + C$ onde C é uma constante.

89. Introduza a mudança $x = 2\operatorname{sen} t$ a fim de obter $\operatorname{arcsen}(x/2) + C$ onde C é uma constante.

90. Integre primeiro na variável r e depois na variável θ. Note que ambas são independentes.

Capítulo 10

Miscelânea

De que irei me ocupar no céu, durante toda eternidade, se não me derem uma infinidade de problemas de matemática para resolver.
Paris, ago 1789 – Augustin-Louis Cauchy – Sceaux, mai 1857.

Este capítulo, diferentemente dos anteriores, conta com uma série de exercícios, propostos para o estudante solidificar o conceito e/ou conteúdo envolvido, todos eles contando com uma sugestão a ser seguida, visando a solução, que se faz presente, sempre, ao final de cada particular exercício, denotado com o símbolo $\star$. É seguida a ordem dos capítulos anteriores sendo o primeiro de cada um deles um exemplo resolvido que, não necessariamente, é pré requisito para os que se seguem. Ainda mais, pode, eventualmente, ocorrer o caso de que precisemos de conceitos envolvendo mais de um particular capítulo. Enfim, sugerimos, para mais exercícios resolvidos,

EXEMPLO 10.1. SUCESSÕES

Considere a sequência (a_n) com $n = 1,2,3,\ldots$ dada por $a_1 = \sqrt{2}$ e $a_n = \sqrt{2+a_{n-1}}$ para $n \geq 2$, a) Mostre que (a_n) é crescente e limitada. b) Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

a) Comecemos por mostrar que a sequência é limitada. Vale a desigualdade $a_1 = \sqrt{2} < 2$. Vamos provar por indução finita que $a_n \leq 2$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Suponha que $a_k \leq 2$. Podemos, então, escrever a desigualdade

$$a_{k+1} = \sqrt{2+a_k} \leq 2 \leq 2$$

isto é, a sequência (a_n) é limitada. Vamos, também, por indução finita, mostrar que essa sequência é crescente. Temos $a_1 = \sqrt{2}$ e $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$. Suponhamos que $a_k \geq a_{k-1}$. Elevando ao quadrado a_k e a_{k+1} podemos escrever

$$a_k^2 = 2 + a_{k-1} \qquad \text{e} \qquad a_{k+1}^2 = 2 + a_k$$

de onde segue, subtraindo uma da outra

$$a_{k+1}^2 - a_k^2 = a_k - a_{k-1}$$

que, após fatorado, fornece

$$(a_{k+1} - a_k)(a_{k+1} + a_k) = a_k - a_{k-1}\cdot$$

Visto que $a_{k+1} + a_k$ e $a_k - a_{k-1}$ são ambos positivos ou nulos concluímos que $a_{k+1} - a_k \geq 0$, isto é, $a_{k+1} \geq a_k$, ou seja, a sequência é crescente.

b) A fim de calcular o limite, introduzimos a notação $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. Da expressão para o termo geral, podemos escrever $L = \sqrt{2+L}$ de onde segue a equação quadrática $L^2 - L - 2 = 0$. Essa equação admite duas raízes reais e distintas, $L = -1$ e $L = 2$. Visto que $a_n \geq 0$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, devemos descartar a raiz negativa, de onde segue para o limite $L = 2$.

EXERCÍCIOS 10.1. SUCESSÕES

1. Seja $n \in \mathbb{N}$. Mostre que a sequência $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ é convergente.

   $\star$ A fim de mostrar que é convergente, mostre que o limite é zero.

2. Seja $n \in \mathbb{N}$. Mostre que a sequência $b_n = \sqrt{n^2+n} - n$ é convergente.

   $\star$ A fim de mostrar que é convergente, mostre que o limite é $1/2$.

3. Seja $n \in \mathbb{N}$. Mostre que a sequência $c_n = \sqrt{n^3+n} - \sqrt{n^3}$ é convergente.

   $\star$ A fim de mostrar que é convergente, mostre que o limite é 1.

4. Considere a sequência de termo geral $a_n = \dfrac{n}{n+a}$ com $a \in \mathbb{R}_+$ e $n \in \mathbb{N}$. Mostre que a sequência é: a) limitada, b) crescente e c) convergente.

   $\star$ Para mostrar que é limitada, verifique que $|n/(n+a)| \leq 1$, enquanto para mostrar que é crescente, verifique que $a_{n+1} \geq a_n$. Enfim, verifique que a sequência converge para a unidade.

5. Verifique se a sequência com termo geral dado por $a_n = n/\operatorname{sen}(2\pi/n)$ é convergente ou divergente.

   $\star$ Utilize a regra de l'Hôpital para verificar que o limite $\lim_{n\to\infty} a_n$ é finito e, portanto, a sequência é convergente. Mostre que o limite é igual a 2π.

6. (FGV/95 - Adaptado) Considere a sequência a seguir

$$\begin{array}{rcl} 1\cdot 9+2 & = & 11 \\ 12\cdot 9+3 & = & 111 \\ 123\cdot 9+4 & = & 1111 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

   Nestas condições, como o número 1111111111 pode ser escrito?

   $\star$ Construa a sequência até que o número 1111111111 apareça.

7. (ITA/96 - Adaptado) Seja $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ uma função injetora de modo que valham $f(1) = 0$ e $f(x\cdot y) = f(x) + f(y)$ para todo $x > 0$ e $y > 0$. Se x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 formam, nessa ordem, uma PG onde $x_i > 0$ para $i = 1,2,3,4,5$ e que valem as relações

$$\sum_{i=1}^{5} f(x_i) = 13f(2) + 2f(x_1) \qquad \text{e} \qquad \sum_{i=1}^{4} f\left(\frac{x_i}{x_{i+1}}\right) = -2f(2x_1)$$

   determine o valor de x_1.

$\star$ Seja q a razão da progressão. Expresse os cinco termos em função do primeiro termo e da razão. Utilize o dado do exercício para mostrar que $f(q^{-1}) = -f(q)$ e o fato de que a função é injetora a fim de obter $x_1 = 2$.

8. Verifique que, se $n \to \infty$, o limite da sucessão

$$1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \cdots \frac{1}{n^2}, \cdots$$

é zero. Seja ε um número positivo e arbitrário. Para quais valores de n a desigualdade $\frac{1}{n^2} < \varepsilon$ se verifica. Especificamente, calcule os valores de n para a) $\varepsilon = 0,1$; b) $\varepsilon = 0,01$ e c) $\varepsilon = 0,001$.

$\star$ Primeiramente, calcule o limite para verificar que o limite é zero. Mostre que $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ enquanto, para a) $n \geq 4$, b) $n > 10$ e c) $n \geq 32$.

9. Sejam $a, b \in \mathbb{N}$ tais que

$$\sum_{n=1}^{98} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{a}{b}.$$

Determine $x = \sqrt{a/b}$.

$\star$ Expresse a fração $1/(n+1)(n+2)$ em termos de frações parciais de modo a mostrar que $x = 7/10$.

10. (Scuola Normale Superiore di Pisa/1909) Mostre que se $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são n números diferentes de zero e entre eles vale a relação

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2)(a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2) = (a_1 a_2 + a_2 a_3 + \cdots + a_{n-1} a_n)^2, \tag{10.1}$$

esses números necessariamente estão em progressão geométrica.

$\star$ Considere a seguinte equação quadrática, na variável x,

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2)x^2 - 2(a_1 a_2 + a_2 a_3 + \cdots + a_{n-1} a_n)x + (a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2) = 0.$$

Note que a Eq.(10.1) é exatamente o discriminante, neste caso, nulo, isto é, temos uma só raiz, a qual denotamos por q. Agora, podemos escrever esse discriminante na forma

$$(a_1 q - a_2)^2 + (a_2 q - a_3)^2 + \cdots + (a_{n-1} q - a_n)^2 = 0$$

ou seja, uma soma de n quadrados. Visto ser uma soma de termos não negativos, só será nula se cada um deles for nulo, logo

$$a_2 = q a_1, \qquad a_3 = q a_2, \quad \cdots \quad a_n = q a_{n-1}$$

isto é, os números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ formam, nessa ordem, uma PG de razão q.

EXEMPLO 10.2. LOGARITMO E EXPONENCIAL

(XXIX Olimpiadas Colombianas de Matemáticas/Prueba Clasificatoria Nacional/2010 - Adaptado) Seja x um ponto, escolhido aleatoriamente, do intervalo $(0,1)$. Denotando por $\lfloor x \rfloor$ o maior inteiro menor ou igual a x, determine a probabilidade a fim de que valha a igualdade

$$\lfloor \log_{10} 4x \rfloor - \lfloor \log_{10} x \rfloor = 0\cdot$$

A condição dada é equivalente a $\lfloor \log_{10} 4x \rfloor = \lfloor \log_{10} x \rfloor$. Então, a condição é cumprida se, e somente se, vale a tripla desigualdade

$$n \leq \log_{10} x < \log_{10} 4x < n+1$$

para algum inteiro n negativo, pois o logaritmo de um número nesse intervalo é sempre negativo. A partir dessa tripla desigualdade, exponenciando temos, equivalentemente, a tripla desigualdade

$$10^n \leq x < 4x < 10^{n+1}.$$

A partir da anterior, separando em duas, podemos escrever

$$10^n \leq x \qquad \text{e} \qquad x < \frac{10^{n+1}}{4}$$

de onde segue a dupla desigualdade

$$10^n \leq x < \frac{10^{n+1}}{4}\cdot$$

Então, em cada intervalo $[10^n, 10^{n+1})$, a condição dada se cumpre com a probabilidade

$$\frac{(10^{n+1}/4) - 10^n}{10^{n+1} - 10^n} = \frac{10/4 - 1}{10 - 1} = \frac{1}{6}\cdot$$

Enfim, devido ao fato de que cada número em $(0,1)$ pertence a um único intervalo $[10^n, 10^{n+1})$ e a probabilidade é a mesma em cada intervalo, concluímos que a probabilidade é igual a $1/6$.

EXERCÍCIOS 10.2. LOGARITMO E EXPONENCIAL

1. Seja $x \in \mathbb{R}$. Escreva a expressão para a função exponencial sabendo que passa pelos pontos $A(1,2)$ e $B(3,8)$.

   $\star$ Parta da forma geral de uma exponencial, utilize a condição de existência para a base e mostre que $y(x) = 2^x$.

2. Seja $x \in \mathbb{R}$. Determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ na função $y(x) = a + b\log_c x$, sabendo que $y(1) = 1$, $y(2) = 2$ e $y(4) = 3$. É a função única?

   $\star$ Substitua os valores de x e os correspondentes valores de $y(x)$ de modo a mostrar que $a = 1$, $b = \log_2 c$ e $c > 0$, obtendo $y(x) = 1 + \log_2 x$.

3. (SEE/Magistério/Concurso Público Professor III/1986-Adaptado) Considere $y = 4x^4$ com $x > 0$. Mostre que o valor da expressão

   $$\frac{1}{2}\log_2 y - 2\log_2 x$$

   independe de x.

   $\star$ Substitua y, utilize as propriedades dos logaritmos e mostre que o valor da expressão é 1.

4. Sejam $x, y \in \mathbb{N}$. Resolva o sistema

$$\begin{cases} x+y & = & 4 \\ \log_y x + \log_x y & = & 2 \end{cases}$$

$\star$ Introduza a notação $\log_x y = z$ e utilize as propriedades dos logaritmos a fim de mostrar que $x = y = 2$.

5. Seja f uma função real de variável real x, dada por $f(x) = (1+\ln x)/x$. a) Determine o domínio. b) verifique se as tangentes à curva $y = f(x)$, nos pontos de abscissas $x_1 = 1/e$ e $x_2 = e$, são perpendiculares entre si [1].

   $\star$ a) Leve em conta que devemos excluir $x = 0$ e considerar $x > 0$, podendo estar entre $0 < x < 1$ ou $x > 1$. Utilizando derivadas, verifique que $(1,1)$ é ponto de máximo e o eixo y é uma assíntota vertical enquanto o eixo x é uma assíntota horizontal. Verifique que o ponto $(\sqrt{e}, 3/2\sqrt{e})$ é ponto de inflexão. b) Verifique que $f(e) \cdot f(1/e) = -1$, logo, sim, as tangentes são perpendiculares.

6. Sejam a e x estritamente positivos. a) Mostre que

$$\ln\left(\frac{x}{a+\sqrt{a^2+x^2}}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{a^2+x^2}-a}{x}\right).$$

   b) Introduza a mudança de variável $x = a\tan\theta$, com $0 < \theta, \pi/2$ a fim de mostrar que

$$\ln\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}\right) = \ln\left(\frac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right).$$

   $\star$ a) Utilize propriedades dos logaritmos. b) Utilize a relação trigonométrica envolvendo a tangente e a secante, bem como as relações explicitando a tangente e a secante em termos das funções seno e cosseno.

7. Um pessoa tem C reais e sabe que com $2C$ reais consegue comprar um pequeno apartamento. Vai a um banco e deposita o dinheiro a uma taxa de 1% ao mês, contados juros sobre juros. Sabendo que $\log_{10} 2 \simeq 0{,}3010$ e $\log_{10} 101 \simeq 2{,}0043$, em quantos meses essa quantia de C, depositada, dobra?

   $\star$ Note que, após n meses, a quantia depositada foi multiplicada por $1{,}01^n$. A fim de que a quantia dobre, temos que determinar n de modo que $1{,}01^n = 2$. Tomando o logaritmo na base dez de ambos os lados e usando os dados obtemos $n = 70$ meses, isto é, são necessários cinco anos e dez meses para que o capital dobre.

8. Sendo o logaritmo de x na base y, satisfazendo as condições de existência, igual a 4 e sabendo que $\log_x 2 = \log_2 y$, calcule y^x.

   $\star$ Utilize mudança de base para mostrar que $y^x = 4$.

9. Seja $x \in \mathbb{R}$. Resolva a inequação

$$2^{x^3-3x^2-4} \leq \frac{1}{256}.$$

   $\star$ Expresse os dois membros na base dois. Compare os expoentes e resolva uma inequação de terceiro grau de modo a obter $\{x \in \mathbb{R} : x \leq -1\}$.

10. Seja $x \in \mathbb{R}$. Considere a função $y(x) = \ln[\ln(x)]$. a) Qual é o domínio dessa função? b) $\exists x$ de modo que $y(x) = 1$?

    $\star$ Utilize a definição de logaritmos de modo a verificar que $\{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$. b) Resolva a equação a fim de obter $x = e^e$.

EXEMPLO 10.3. TRIGONOMETRIA

(Revista do Professor de Matemática 10/1987) Seja a uma constante real. Elimine θ das equações a seguir

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x \operatorname{sen}\theta + y\cos\theta & = & 2a\operatorname{sen}2\theta \\ x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta & = & a\cos 2\theta \end{array} \right.$$

Multiplicando a primeira das equações por $\cos\theta$, a segunda equação por $\cos\theta$ e adicionando-se obtemos

$$x = a(3\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta + \cos^3\theta). \tag{10.2}$$

Agora, multiplicando a primeira equação por $\cos\theta$, a segunda equação por $\operatorname{sen}\theta$ e subtraindo uma da outra podemos escrever

$$y = a(3\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^3\theta). \tag{10.3}$$

Adicionando as Eq.(10.2) e Eq.(10.3) obtemos $x + y = a(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)^3$, enquanto subtraindo as Eq.(10.2) e Eq.(10.3) obtemos $x - y = a(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)^3$.

Assim, a partir das expressões para a soma e a diferença, $x \pm y$, podemos extrair a raiz cúbica de ambos os lados e elevar ao quadrado, fornecendo

$$(x+y)^{\frac{2}{3}} + (x-y)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}[(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)^2 + (\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)^2].$$

Utilizando a relação fundamental da trigonometria e simplificando, temos

$$(x+y)^{\frac{2}{3}} + (x-y)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}.$$

Introduzindo as coordenadas $\alpha = x + y$ e $\beta = x - y$ e definindo $2a^{\frac{2}{3}} = b^{\frac{2}{3}}$, obtemos

$$\alpha^{\frac{2}{3}} + \beta^{\frac{3}{3}} = b^{\frac{2}{3}}$$

que é a equação de uma hipociclóide de quatro cúspides que, na forma paramétrica, toma a forma

$$\alpha = b\cos^3 t \qquad \text{e} \qquad \beta = b\operatorname{sen}^3 t$$

onde t é um parâmetro. Veja a Figura 9.10.

EXERCÍCIOS 10.3. TRIGONOMETRIA

1. (SEE/Magistério/Concurso Público Professor III/1986-Adaptado) Sejam a e b duas raízes, no intervalo $[0, 2\pi]$, da equação $\operatorname{sen}x - \cos x = m$. Determine os possíveis valores de m sabendo que $b - a = \pi/2$.

    $\star$ Substitua os valores de x para a e b. Elimine b a partir da condição dada e resolva uma equação trigonométrica enolvendo a ou b de modo a obter os valores de $m = \pm 1$.

2. Calcule $\Omega = \log\tan\pi/180 + \log\tan\pi/90 + \cdots + \log\tan 89\pi/180$.

   $\star$ Utilize a propriedade dos logaritmos associada às somas de logaritmos de mesma base, a relação trigonométrica envolvendo a tangente, o seno e o cosseno, bem como o resultado: a soma de arcos complementares é igual a $\pi/2$ radianos. Mostre que $\Omega = 0$.

3. (Escola de Engenharia Mackenzie/1963) Determinar o ângulo C de um triângulo sabendo que os outros dois ângulos A e B estão relacionados por

$$\begin{cases} \tan A + \tan B &= \operatorname{sen}^2 C \\ \cos A \cos B &= \operatorname{sen} C\,. \end{cases}$$

   $\star$ Utilize a relação trigonométrica envolvendo a tangente, o seno e o cosseno, bem como a expressão para o seno da soma de arcos. Resolva a equação resultante de modo a mostrar que $C = \pi/2$ radianos.

4. (Faculdade Nacional de Filosofia/1947) Sabe-se que $\tan 2x = 2/3$. Calcular o valor de $y = \cos^2 x + 3\operatorname{sen}^2 x + 8\operatorname{sen} x \cos x\cdot$

   $\star$ Utilize a relação fundamental da trigonometria de modo a expressar o seno ou o cosseno em função do cosseno ou do seno, bem como a expressão para o seno do arco dobro. Expresse-os em função da $\tan 2x$ a fim de mostrar que $y = (26 + 5\sqrt{13})/13$.

5. (Escola Fluminense de Engenharia/1957) Simplificar

$$\frac{\operatorname{sen} 2\pi/9 + \operatorname{sen} 5\pi/18 + \operatorname{sen} 2\pi/5 + \operatorname{sen} 41\pi/90}{\cos 2\pi/9 - \cos 5\pi/18 + \cos 2\pi/5 - \cos 41\pi/90}\cdot$$

   $\star$ Valem as igualdades $2\pi/9 + 41\pi/90 = 5\pi/18 + 2\pi/5$ e $2\pi/5 - 2\pi/9 = 41\pi/90 - 5\pi/18$. Utilize as expressões para transformar em produtos a fim de mostrar que o resultado é $\cot\pi/36$. Se preferir trabalhar com os arcos em graus, substitua (formalmente) π radianos por 180 graus. O resultado será $\cot 5^\circ\cdot$

6. Seja $0 < x < \pi/2$. Dar o conjunto solução para a inequação

$$4\operatorname{sen}^2 x + 2(1+\sqrt{2})\cos x > 4 + \sqrt{2}\cdot$$

   $\star$ Utilize a relação fundamental da trigonometria para escrever a desigualdade em termos da função cosseno. Introduza uma mudança de variável $\cos x = t$ e resolva a inequação na variável t. Volte na variável inicial x e resolva duas inequações trigonométricas na variável x, para obter a solução $\{x \in \mathbb{R} : \pi/4 < x < \pi/3\}$.

7. De um navio avista-se, sob um ângulo de α, o topo de um farol de altura h. Após viajar d milhas, na mesma reta que une o farol e o ponto de onde se avistou sob um ângulo α, avista-se o topo do mesmo farol sob um ângulo β. Determine a altura do farol.

   $\star$ Utilize a definição de tangente nos dois triângulos retângulos de modo a mostrar que que a altura do farol é $h = d\dfrac{\tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta - \tan\alpha}\cdot$

8. (Faculdade de Engenharia do Paraná/1947-Adaptado) Determinar os lados de um triângulo que tem por lados x, $x+1$ e $x+2$, sabendo que o ângulo oposto ao menor lado é igual à metade do ângulo oposto ao maior lado.

   $\star$ Utilize o fato de que a soma dos ângulos internos em um triângulo é igual a π radianos, bem como a lei dos senos a fim de obter uma equação quadrática em x. Mostre que $x=4$ de onde os outros lados são 5 e 6.

9. (Revista do Professor de Matemática 10/1987) Dê um exemplo de uma equação da forma $x^3+ax^2+bx+c=0$ com a, b e c racionais, que tenha três raízes reais irracionais e exiba essas raízes.

   $\star$ Considere a função $f(x)=x^3-3x-1$. Os valores numéricos para essa função nos pontos -2, -1, 1 e 2, mostra que a equação $x^3-3x-1=0$ admite três raízes reais. Visto que as únicas possíveis racionais 1 e -1 não satisfazem a equação, logo são irracionais. Para determinar as raízes introduza $x=2y$ e utilize a relação do cosseno do arco triplo de modo obter

$$\cos\left[\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right].$$

   Mostre que as raízes são $2\cos(2\pi/9)$, $2\cos(8\pi/9)$ e $\cos(14\pi/9)$.

10. (Revista do Professor de Matemática 13/1988-Adaptado) Utilizando o anterior prove que

$$\cos\frac{2\pi}{9}\cdot\cos\frac{8\pi}{9}+\cos\frac{2\pi}{9}\cdot\cos\frac{14\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9}\cdot\cos\frac{14\pi}{9}=-\frac{3}{4}.$$

   $\star$ Parta do resultado $\cos 2\pi/3=-1/2$ e utilize as fórmulas de transformação em produto para mostrar que a soma das três raízes (Ex.9) é zero. Eleve essa expressão ao quadrado e use a expressão do cosseno do arco dobro, rearranje e obtenha o resultado.

EXEMPLO 10.4. NÚMEROS COMPLEXOS

Sejam $x,y,z\in\mathbb{R}$ tais que $\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}y+\operatorname{sen}z=0$ e $\cos x+\cos y+\cos z=0$. Mostre as relações $\operatorname{sen}2x+\operatorname{sen}2y+\operatorname{sen}2z=0$ e $\cos 2x+\cos 2y+\cos 2z=0$.

Vamos introduzir os complexos: $z_1=\cos x+i\operatorname{sen}x$, $z_2=\cos y+i\operatorname{sen}y$ e $z_3=\cos z+i\operatorname{sen}z$. Todos eles têm módulo unitário, isto é, $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$. Por outro lado, a partir das expressões dadas, podemos escrever $z_1+z_2+z_3=0$.

Elevando a expressão $z_1+z_2+z_3=0$ ao quadrado e rearranjando, temos

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2=\underbrace{(z_1+z_2+z_3)^2}_{=0}-2(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)$$

Essa expressão pode ser escrita na forma

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2=-2z_1z_2z_3\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right). \tag{10.4}$$

Por outro lado, notamos que

$$\frac{1}{z_i}=\frac{1}{\cos\theta_i+\operatorname{sen}\theta_i}=\frac{1}{\cos\theta_i+\operatorname{sen}\theta_i}\cdot\frac{\cos\theta_i-\operatorname{sen}\theta_i}{\cos\theta_i-\operatorname{sen}\theta_i}=\cos\theta_i-\operatorname{sen}\theta_i=\overline{z_i}$$

com $i = 1,2,3$ e $\overline{z_i}$ denota o complexo conjugado. Voltando na Eq.(10.4) podemos escrever

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = -2z_1z_2z_3(\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}) = -2z_1z_2z_3\,\underbrace{(\overline{z_1 + z_2 + z_3})}_{=0}.$$

Então, visto que $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$ e utilizando a primeira fórmula de de Moivre obtemos

$$(\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z) + i(\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 2y + \operatorname{sen} 2z) = 0.$$

Enfim, da igualdade de dois númeos complexos, isto é, partes reais são iguais e partes imaginárias são iguais, segue o resultado,

$$\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z = 0 \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 2y + \operatorname{sen} 2z = 0\cdot$$

EXERCÍCIOS 10.4. NÚMEROS COMPLEXOS

1. (SEE/Magistério/Concurso Público Professor III/1986-Adaptado) Considere $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > 1$. Determine n para que a soma $i + 1^2 + \cdots + i^n$ seja nula.

   $\star$ Utilize as potências de i para mostrar que n deve ser um múltiplo de 4.

2. (SEE/Magistério/Concurso Público Professor III/1986-Adaptado) Admita que $\alpha = 1 - i$, onde i é a unidade imaginária. Se z é um número complexo, tal que os números $\alpha^2 z, \alpha z^2$ e z^3 são vértices distintos de um triângulo equilátero. Determine a parte imaginária de z.

   $\star$ Visto que o triângulo é equilátero, obtenha as distâncias (todas iguais) entre os vértices. Da igualdade de dois número complexos, isto é, partes reais são iguais e partes imaginárias são iguais, mostre que a parte imaginária de z é igual a $(1 \pm \sqrt{3})/2$.

3. (SEE/Magistério/Concurso Público Professor III/1986-Adaptado) Seja z um número complexo e θ o seu argumento. Obtenha uma condição necessária e suficiente para que z e z^2 sejam complexos não reais.

   $\star$ Expresse z e z^2 na forma trigonométrica, analise as partes imaginárias de modo a concluir que $\operatorname{sen} 2\theta \neq 0$.

4. Seja i a unidade imaginária. Calcule i^i.

   $\star$ Considere $z \in \mathbb{C}$ com $z \neq 0$. Escreva o logaritmo de z na forma

   $$\operatorname{Log} z = \log|z| + i(\theta + 2k\pi)$$

   com $k \in \mathbb{Z}$. $\log z$ é a função logaritmo real na base e e θ é a medida, em radianos, no intervalo $]-\pi,\pi]$, do ângulo que o vetor forma com o eixo horizontal. Escreva z na forma trigonométrica para mostrar que

   $$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

   para todo $z = x + iy$ com $x, y \in \mathbb{R}$. Mostre que $i^i = e^{-\pi/2} \cdot e^{-2k\pi}$ com $k \in \mathbb{Z}$. Note que é um número real.

5. (MEC-INEP-Exame Nacional de Cursos/1998-Adaptado) O número complexo $2 + i$ é raiz do polinômio $P(x)$, de coeficientes reais. O que é possível garantir em relação a $P(x)$?

   $\star$ Utilize o fato de que as raízes complexas vem aos pares a fim de mostrar que $P(x)$ é divisível por $z^2 - 4z + 5$.

6. Seja $f(z) = \dfrac{2z+3}{z+1}$ com $z \neq -1$. Descreva geometricamente a região tal que $\mathrm{Re}[f(z)] \leq 1$.

   ⋆ Multiplique numerador e denominador pelo conjugado do denominador, tome a parte real desse quociente e resolva uma inequação de grau dois, de modo a mostrar que

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + y^2 \leq \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2,$$

   isto é, o interior da circunferência de centro em $(-3/2,0)$ e raio $\sqrt{13}/2$.

7. Prove que $\left|\dfrac{6z-i}{2+3iz}\right| \leq 1$ se, e somente se, $|z| \leq 1/3$.

   ⋆ Escreva a desigualdade na forma $6z-i| \leq |2+3iz|$ e use a definição de módulo a fim de obter $z \cdot \overline{z} \leq 1/9$ onde $\overline{z}$ é o complexo conjugado de z. Conclua o resultado.

8. Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ não nulos. Obtenha o cosseno do ângulo formado pelos vetores representados por esses dois números complexos.

   ⋆ Escreva $z_1 = a+bi$ e $z_2 = c+di$ com $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Obtenha $z_1\overline{z}_2$ e $\overline{z}_1 z_2$ de modo a mostrar que a soma das duas quantidades é igual a $2(ac+bd)$, isto é, um número real. Identifique os vetores $\vec{z}_1 = (a,b)$ e $\vec{z}_2 = (c,d)$ de modo que o produto escalar entre esses dois vetores, definido por, $\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_2 = |\vec{z_1}_1||\vec{z}_2 \cos\theta$, onde θ é o ângulo por eles formado, forneça

$$\cos\theta = \frac{z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2}{2|z_1||z_2|},$$

   que é o cosseno do ângulo formado pelos dois vetores.

9. Seja $x \in \mathbb{R}$. Utilize números complexos para obter o conjunto solução da equação trigonométrica $\cos x + \cos 2x - \cos 3x = 1$.

   ⋆ Introduza a notação $z = \cos x + i\,\mathrm{sen}\,x$ de modo a mostrar que

$$\cos x = \frac{z^2+1}{2z}, \qquad \cos 2x = \frac{z^4+1}{2z^2}, \qquad \cos 3x = \frac{z^6+1}{2z^3}.$$

   Escreva uma equação de sexto grau na variável z e utilize fatoração de modo a obter

$$(z^3+1)(z-1)^2(z+1) = 0.$$

   Resolva as três equações e obtenha a intersecção para mostrar que

$$x \in \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{2k+1}{2}\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}\cdot$$

10. Prove que $\cos^2(\pi/18) + \cos^2(5\pi/18) + \cos^2(7\pi/18) = \frac{3}{2}\cdot$

    ⋆ Definindo $z = \cos(\pi/18) + i\,\mathrm{sen}(\pi/18)$, pela primeira fórmula de de Moivre, temos $z^9 = i$, bem como, em analogia ao anterior, podemos escrever

$$\cos(\pi/18) = \frac{z^2+1}{2z}, \qquad \cos(5\pi/18) = \frac{z^{10}+1}{2z^5}, \qquad \cos(7\pi/18) = \frac{z^{14}+1}{2z^7}\cdot$$

Substitua essas expressões na identidade a ser provada de modo a obter a equação de grau 28 na variável z, $z^{28}+z^{24}+z^{16}+z^{12}+z^4+1=0$. Visto que $z^{18}=-1$ obtemos $(z^4+1)(z^{12}-z^6+1)=0$. Multiplique numerador e denominador dessa expressão por z^6+1, use fatoração de modo a escrever a igualdade

$$\frac{(z^4+1)(z^{18}+1)}{z^6+1}=0$$

e conclua o resultado.

EXEMPLO 10.5. POLINÔMIOS E EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Suponha que P seja um polinômio com coeficientes complexos e de grau par. Se todas as raízes de P são números complexos não reais de módulo unitário, prove que

$$P(1) \in \mathbb{R} \text{ se, e somente se, } P(-1) \in \mathbb{R}\cdot$$

A fim de provar o resultado, basta provar que o quociente $P(1)/P(-1)$ é um número real. Sejam $z_1, z_2, \ldots, z_{2n}$ as raízes de P, de onde segue

$$P(z) = \lambda(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_{2n})$$

sendo $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Vamos escrever o quociente $P(1)/P(-1)$, logo

$$\frac{P(1)}{P(-1)} = \frac{(1-z_1)(1-z_2)\cdots(1-z_{2n})}{(-1-z_1)(-1-z_2)\cdots(-1-z_{2n})} = \prod_{i=1}^{2n}\left(\frac{1-z_i}{1+z_i}\right)$$

pois o número de raízes é par.

Da hipótese, temos que $|z_i|=1$ para $i=1,2,\ldots,2n$, de onde segue, para o complexo conjugado do quociente

$$\overline{\left(\frac{1-z_i}{1+z_i}\right)} = \frac{1-\bar{z}_i}{1+\bar{z}_i} = -\frac{1-z_i}{1+z_i}, \tag{10.5}$$

onde, na última igualdade, utilizamos o fato de o módulo ser unitário.

Passemos a calcular o complexo conjugado do quociente $P(1)/P(-1)$ de modo a provar que é um número real, o que prova o resultado desejado. Assim, podemos escrever

$$\overline{\left(\frac{P(1)}{P(-1)}\right)} = \prod_{i=1}^{2n}\overline{\left(\frac{1-z_i}{1+z_i}\right)},$$

que, utilizando a Eq.(10.5), permite escrever

$$\overline{\left(\frac{P(1)}{P(-1)}\right)} = \prod_{i=1}^{2n}\left(-\frac{1-z_i}{1+z_i}\right) = (-1)^{2n}\prod_{i=1}^{2n}\left(\frac{1-z_i}{1+z_i}\right) = \frac{P(1)}{P(-1)}\cdot$$

Visto que mostramos que um número complexo é igual ao seu complexo conjugado, concluímos que esse número é real, o que prova o resultado.

1. (SEE/Magistério/Concurso Público Professor III/1986-Adaptado) Sabendo que a equação $x^3 + 2x^2 - px + q = 0$, com $p, q \in \mathbb{R}$, admite o número complexo $1 - i$ como raiz, determine q.

   $\star$ Visto que os coeficientes da equação são reais, $1 + i$ também é raiz. Utilize o teorema de d'Alembert de modo a obter um sistema linear de duas equações a duas incógnitas, p e q, a fim de mostrar que $q = 8$.

2. (SEE/Magistério/Concurso Público Professor III/1986-Adaptado) Determine o número de raízes reais do polinômio real $P(x) = x^3 + 3x + c$, sendo $c \in \mathbb{R}$.

   $\star$ Primeiramente, note que só podemos ter dois casos, isto é, ou três raízes reais ou apenas uma raiz real. Utilize as relações de Girard e suponha que $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, é raiz a fim de mostrar que apenas uma raiz é real.

3. (SEE/Magistério/Concurso Público Professor III/1986-Adaptado) Considere o polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, e que 2 é raiz dupla. Determine a outra raiz.

   $\star$ Seja $\mu \in \mathbb{R}$ a outra raiz. Efetue a multiplicação $(x + \mu)(x^2 - 4x + 4)$ e, utilizando identidade de polinômio, iguale esse produto com $p(x)$ e mostre que a outra raiz é dada por $\mu = -(a + b + c)$.

4. (Competição de Matemática Putnam/1989) Prove que se

   $$11z^{10} + 10iz^9 + 10iz - 11 = 0$$

   então $|z| = 1$.

   $\star$ Reescreva a equação na forma $z^9 = \dfrac{11 - 10iz}{11z + 10i}\cdot$ Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Escreva $z = a + bi$ e tome o módulo de modo a obter

   $$|z^9| = \frac{\sqrt{121 + 220b + 100(a^2 + b^2)}}{\sqrt{121(a^2 + b^2) + 220b + 100}}.$$

   Denote por $f(a,b)$ e $g(a,b)$ o numerador e o denominador, respectivamente, do lado direito da equação. Conclua que se $|z| > 1$ implica $g(a,b) > f(a,b)$, isto é, $|z^9| < 1$, um absurdo. Raciocínio análogo no caso em que $|z| < 1$, logo $|z| = 1$.

5. Escreva a equação de coeficientes reais e de grau 5 que admite como raízes $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1$ e $z_3 = -1$ (dupla).

   $\star$ Visto que os coeficientes são reais, $z_4 = 1 - i$ também é raiz. Efetue o produto

   $$(z - 1 - i)(z - 1 + i)(z - 1)(z + 1)^2$$

   de modo a mostrar que $z^5 - z^4 - z^3 + 3z^2 - 2 = 0$ é a equação desejada.

6. Utilize a fórmula de Cardano para obter as três raízes da equação algébrica $x^3 + 3x - 4 = 0$.

   $\star$ Substitua na fórmula de Cardano e obtenha $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$. As raízes complexas são $x_{1,2} = (-1 \pm i\sqrt{15})/2$. Verifique que a raiz real é igual à unidade, como se confirma diretamente da equação.

7. Seja $z \in \mathbb{C}$. Resolva a equação $(z+1)^n + (z-1)^n = 0$ com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 1$.

   $\star$ Faça $n = 1$ para verificar que $z = 1$ não é raiz da equação. Diante disso, podemos escrever

$$\frac{z+1}{z-1} = -1 = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}$$

   com $k = 0, 1, 2 \ldots, n$. Conclua que

$$z = \frac{\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + 1\right) + i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}}{\left(\cos\frac{2k\pi}{n} - 1\right) + i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}}.$$

8. (Revista do Professor de Matemática 70/2009) Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que valem as relações

$$abc = 1 \qquad \text{e} \qquad a+b+c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

   Mostre que um desses números reais a, b ou c é igual a 1.

   $\star$ Utilize as relações de Girard para escrever um polinômio de grau 3 e mostre que $x = 1$ é raiz desse polinômio.

9. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Denote por z_i com $i = 1, 2, \ldots, 6$ as raízes da equação

$$z^6 + az^5 + bz^4 + cz^3 + bz^2 + az + 1 = 0.$$

   Prove que

$$\prod_{i=1}^{6}(z_i^2 + 1) = (2a - c)^2.$$

   $\star$ Considere $f(z) = z^6 + az^5 + bz^4 + cz^3 + bz^2 + az + 1$. Escreva

$$\prod_{i=1}^{6}(z_i^2 + 1) = \prod_{i=1}^{6}(z_i + i)\prod_{i=1}^{6}(z_i - i) = f(-i)f(i).$$

   Calcule $f(-i)$ e $f(i)$ de modo a obter

$$f(-i)f(i) = (i^6 + ai^5 + bi^4 + ci^3 + bi^2 + ai + 1)(i^6 - ai^5 + bi^4 - ci^3 + bi^2 - ai + 1).$$

   Simplifique e obtenha o resultado desejado.

10. (MEC-INEP-Exame Nacional de Cursos/1998-Adaptado) Determinar o resto da divisão do polinômio $p(x) = 9x^9 + 6x^6 + 3x^3 + 1$ por $q(x) = x + 1$.

    $\star$ Utilize o teorema do resto para mostrar que o resto é -5.

EXEMPLO 10.6. FUNÇÕES

(Revista do Professor de Matemática 49/2002) Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ uma função tal que

i) $f(n) = 0$ se $n = 2^j - 1$, $j = 0, 1, 2, \ldots$
ii) $f(n+1) = f(n) - 1$ se $n \neq 2^j - 1$, $j = 0, 1, 2, \ldots$

Demonstre que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, existe $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$ tal que $f(n) + n = 2^k - 1$. Calcule $f(2^{1990})$.

Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, existe $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$ tal que $2^k \leq n \leq 2^{k+1} - 1$. Se $n = 2^{k+1} - 1$, então por i) temos $f(n) = 0$ e, nesse caso, $f(n) + n = 2^{k+1} - 1$. Se $2^k \leq n \leq 2^{k+1} - 1$ consideramos: Para $m = 2^{k+1} - 2$, podemos usar ii), obtendo

$$f(m+1) = f(2^{k+1} - 1) = 0 = f(2^{k+1} - 2) - 1 \text{ ou } f(2^{k+1} - 2) = 1.$$

Do mesmo modo

$$f(2^{k+1} - 2) = f(2^{k+1} - 3) - 1, \text{ ou } 0 = f(2^{k+1} - 2) - 1 = f(2^{k+1} - 3) - 2.$$

Continuando o processo, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= f(2^{k+1} - 2) - 1 = f(2^{k+1} - 3) - 2 = \cdots = f(2^{k+1} - r) - (r - 1) = \cdots \\ &= f(2^{k+1} - 2^k) - 2^k + 1 \end{aligned}$$

sendo $1 \leq r \leq 2^k$.

Do último termo, temos $2^{k+1} - 2^k = 2^k$ logo $f(2^k) = 2^k - 1$, de onde $f(2^{1990}) = 2^{1990} - 1$.

Para cada número n, $2^k \leq n \leq 2^{k+1} - 1$, temos $n = 2^{k+1} - r$, com $1 \leq r \leq 2^k$ de onde segue, $f(n) = r - 1 = 2^{k+1} - n - 1$, o que prova $f(n) + n = 2^{k+1} - 1$.

EXERCÍCIOS 10.6. FUNÇÕES

1. (SEE/Magistério/Concurso Público Professor III/1986-Adaptado) O gráfico de uma função quadrática tem o eixo y como eixo de simetria, a distância entre os zeros é 4 e tem -5 como valor mínimo. Escreva essa função quadrática.

   $\star$ Dos dados do exercício conclua que $x_V = 0$ e $y_V = -5$ (coordenadas do vértice). Mostre que as duas raízes são $x_1 = 2$ e $x_2 = -2$ e obtenha $f(x) = \frac{5}{4}x^2 - 5$.

2. (SEE/Magistério/Concurso Público Professor III/1986-Adaptado) Obtenha o intervalo onde a função
$$y = \frac{2 + 7x - 15x^2}{x - 5 + 6x^2}$$
   é estritamente positiva.

   $\star$ Utilize fatoração de trinômios do segundo grau e obtenha os zeros a fim de mostrar que $\{x \in \mathbb{R} : -1 < x < -1/5\}$.

3. (Unicamp/2015) Considere a um número real e positivo e as funções afins $f(x) = ax + 3a$ e $g(x) = 9 - 2x$ definidas para todo número real x. a) Encontre o número de soluções inteiras da inequação $f(x)g(x) > 0$ e b) Encontre o valor de a tal que $f(g(x)) = g(f(x))$ para todo número real x.

   $\star$ a) Mostre que o conjunto solução da inequação é $-3 < x < 9/2$ a fim de obter as soluções inteiras $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$. b) Utilize a definição de função composta a fim de mostrar que $a = 1/2$.

4. (Unicamp/2015) Considere a função $f(x) = 10^{1+x} + 10^{1-x}$ definida para todo número real x. a) Mostre que $f(\log_{10}(2+\sqrt{3}))$ é um número inteiro. b) Sabendo que $\log_{10} 2 \simeq 0,3$, encontre os valores de x para os quais $f(x) = 52$.

   $\star$ a) A partir da definição de logaritmo mostre que $f(\log_{10}(2+\sqrt{3})) = 40$. b) Introduza a mudança $10^x = y$ e obtenha uma equação do segundo grau. Volte, utilize o dado do exercício e mostre que $x_1 = -0,7$ e $x_2 = 0,7$.

5. (Unicamp/2016-Adaptado) Considere a função afim $f(x) = ax + b$, definida para todo número real x onde a e b são números reais. Sendo $f(4) = 2$ determine $f(f(3) + f(5))$.

   $\star$ Direto da definição de função para obter 2.

6. (Unicamp/2017-Adaptado) Seja $f(x)$ uma função tal que para todo número real x temos que $xf(x-1) = (x-3)f(x) + 3$. Calcule $f(1)$.

   $\star$ Direto da definição de função para mostrar que $f(1) = 1$.

7. (ITA/2000-Adaptado) Se $f:]0,1[\to \mathbb{R}$ é tal que $\forall x \in]0,1[, |f(x)| < \frac{1}{2}$ e

$$f(x) = \frac{1}{4}\left[f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right]$$

   obtenha a desigualdade válida para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$ e $0 < x < 1$.

   $\star$ Utilize a definição de módulo a fim de escrever a desigualdade

$$\begin{aligned} |f(x)| = \frac{1}{4}\left[\left|f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right|\right] &\leq \frac{1}{4}\left[\left|f\left(\frac{x}{2}\right)\right| + \left|f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right|\right] \\ &< \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

   Repita o procedimento, agora, para $|f(x)| < \dfrac{1}{4}$ de modo a obter

$$\begin{aligned} |f(x)| = \frac{1}{4}\left[\left|f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right|\right] &\leq \frac{1}{4}\left[\left|f\left(\frac{x}{2}\right)\right| + \left|f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right|\right] \\ &< \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

   Continuando com o processo mostre que $|f(x)| < \dfrac{1}{2^n}$.

8. (MEC-INEP-Exame Nacional de Cursos/1998-Adaptado) Admita que a pressão da água varia com a profundidade. Sabe-se que a pressão da água no nível do mar é de 1 atm (atmosfera) e que a cada 5 m de profundidade a pressão sofre um acréscimo de 0,5 atm. Escreva a expressão que fornece a pressão p, em atmosferas, em função da profundidade h, em metros.

   $\star$ Escreva a equação na forma $p = a + bh$ onde a e b devem ser determinados a fim de obter $p = 1 + h/10$.

9. (MEC-INEP-Exame Nacional de Cursos/2001-Adaptado) A escala termométrica Celsius adota os valores 0 e 100 para os pontos de fusão do gelo e de ebulição da água, à pressão normal, respectivamente. A escala Fahrenheit adota os valores 32 e 212 para esses mesmos pontos. Determine, numa dada temperatura, quando o número lido na escala Fahrenheit é maior que o lido na escala Celsius.

   $\star$ Escreva, através do teorema de Tales, uma relação do tipo $t_F = a + bt_C$ onde a e b devem ser determinados, a fim de relacionar as duas escalas e conclua que t_F tem que ser maior que $-40^\circ C$.

10. Mostre que uma função do tipo exponencial fica determinada quando se conhecem dois de seus valores. Mais precisamente, se $f(x) = b \cdot a^x$ e $F(x) = B \cdot A^x$ são tais que $f(x_1) = F(x_1)$ e $f(x_2) = F(x_2)$ com $x_1 \neq x_2$ então $a = A$ e $b = B$.

    $\star$ Escreva $b \cdot a^{x_1} = B \cdot A^{x_1}$ e o correspondente para x_2. Visto que $x_1 \neq x_2$ conclua que $a = A$ e $b = B$.

EXEMPLO 10.7. LIMITES

Utilize o limite fundamental, envolvendo o número e, para calcular

$$\Lambda = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n^{n+1} + (n+1)^n}{n^{n+1}} \right]^n \cdot$$

Primeiramente, devemos notar que estamos diante de uma indeterminação do tipo 1^∞. Sabendo que o limite da(o) soma (produto) é a(o) soma (produto) dos limites, podemos escrever

$$\Lambda = \lim_{n\to\infty} \left[1 + \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{e}{n}\right)^n$$

onde na última passagem utilizamos o limite fundamental $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Com uma mudança de variável $n \to ex$ e novamente o limite fundamental, envolvendo o número e obtemos

$$\Lambda = e^e \cdot$$

EXERCÍCIOS 10.7. LIMITES

1. Calcule, se existirem, os limites

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to 2} \left(\frac{x^2 - 4}{x^2 + 4x + 4} \right) \qquad \text{e} \qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to 4} \left(\frac{x^2 - 9x + 20}{x^2 - 16} \right) \cdot$$

   $\star$ Utilize fatoração, simplifique e mostre que: a) 0 e b) $-1/8$.

2. Calcule, se existirem, os limites

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2x} \right) \qquad \text{e} \qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2x} \right) \cdot$$

   $\star$ Utilize a regra de l'Hôpital para mostrar que: a) ∞ e b) $1\cdot$

3. Calcule, se existirem, os limites usando a regra de l'Hôpital

$$\text{a)}\quad \lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x^2)}{\operatorname{sen}^2(x/2)}\right] \qquad \text{e} \qquad \text{b)}\quad \lim_{x\to 0}\left[\frac{\cos x - 1}{\ln(1+x^2)}\right]\cdot$$

⋆ Utilize o limite fundamental trigonométrico para obter: a) $1/2$ e b) $-1\cdot$

4. Calcule, se existirem, os limites

$$\text{a)}\quad \lim_{x\to 0}\left[\frac{3x-\tan(3x)}{x^3}\right] \qquad \text{e} \qquad \text{b)}\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3+6\operatorname{sen} x-6x}{x^5}\right)\cdot$$

⋆ Utilize a regra de l'Hôpital mais de uma vez e o limite fundamental trigonométrico a fim de obter: a) 9 e b) $3/80\cdot$

5. Calcule o limite $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos\sqrt{x})^{\operatorname{sen} x}$.

⋆ Tome o logaritmo e use a regra de l'Hôpital para mostrar que é 1.

6. Calcule o limite $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}\xi\, d\xi\right)$.

⋆ Utilize o TFC e a regra de l'Hôpital para mostrar que é 1.

7. (MEC-INEP-Exame Nacional de Cursos/2001-Adaptado) Se $f(x)=x^3$, calcule o limite

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

⋆ Utilize a expressão para o cubo da soma, simplifique e mostre que o limite é igual a $3x^2$.

8. Denotando por $f'(x)$ a derivada de uma função contínua, mostre que

$$f'(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(x+\varepsilon)-f(x-\varepsilon)}{2\varepsilon}$$

com $\varepsilon>0$.

⋆ Parta da definição de derivada e faça uma conveniente mudança de variável.

9. Considere a soma

$$S_n=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2$$

interpretada como a soma de n retângulos todos eles de base $1/n$ e altura $(i/n)^2$ com $i=1,2,\ldots,n$. Calcule o limite $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ e interprete.

⋆ Utilize o resultado $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$, isto é, a soma dos quadrados dos n números inteiros de modo a mostrar que o limite é igual a $1/3$. Esse valor é a área delimitada pela curva x^2, os eixos coordenados e a reta de abscissa $x=1$.

10. Seja $a > 0$. Calcule, se existirem, os limites

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x - 1}{x}\right) \qquad \text{e} \qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to 0}\left[\frac{(1+x)^a - 1}{x}\right].$$

$\star$ a) Utilize a mudança de variável $a^x = 1 + 1/t$, o limite fundamental envolvendo a exponencial e a expressão para a mudança de base dos logaritmos de modo a mostrar que o limite vale $\ln a$.
b) Utilize a mudança de variável $(1+x)^a = t$, o limite fundamental envolvendo a exponencial e a regra de l'Hôpital para mostrar que o limite é igual a a.

EXEMPLO 10.8. DERIVADAS

Fólio (*folium*) de Descartes. Vamos apresentar o fólio de Descartes de modo a aproveitar e fazer uma breve revisão das funções implícitas. Ressaltamos que esse tópico fica bem caracterizado após o chamado teorema de Green, que foge do escopo do presente livro. A equação, na forma implícita, que descreve essa curva, em coordenadas cartesianas, é, conforme Figura 10.1

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

com $a > 0$ um parâmetro. É importante notar que se o ponto (a,b) pertence a essa curva, também pertence a ela o ponto (b,a), isto é, temos uma figura simétrica em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, $y = x$.

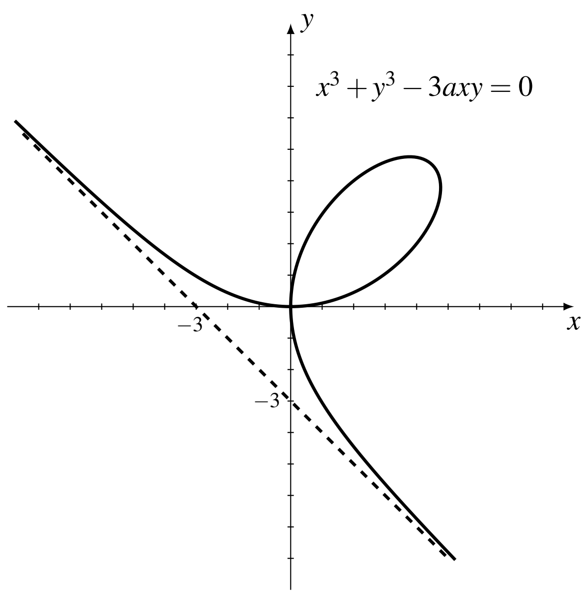


Figura 10.1: Fólio (*folium*) de Descartes.

Por outro lado, introduzindo um parâmetro $t \in \mathbb{R}$, podemos escrever a equação na forma paramétrica,

$$x = \frac{3at}{1+t^3} \qquad \text{e} \qquad y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

Temos uma descontinuidade em $t = -1$, pois os denominadores das expressões na forma paramétrica são nulos. A ala esquerda é gerada quando o parâmetro está no intervalo $-1 < t < 0$, enquanto para o *loop* o parâmetro encontra-se no intervalo $0 < t < \infty$ e para a ala direita, temos $-\infty < t < -1$. Determinar a área da alça (laço) e escrever a equação da respectiva assíntota.

A fim de calcular essa área, vamos trabalhar com coordenadas polares no plano, $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ sendo r a coordenada radial e θ o ângulo formado pelo eixo horizontal e r, no sentido anti-horário. Primeiramente, expressamos r em função do parâmetro t

$$r^2 = x^2 + y^2 = \left(\frac{3at}{1+t^3}\right)^2 + \left(\frac{3at^2}{1+t^3}\right)^2 = \frac{9a^2t^2(1+t^2)}{(1+t^3)^2}$$

agora, expressamos o ângulo θ em função de t

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{3at^2/(1+t^3)}{3at/(1+t^3)} = t\cdot$$

Eliminando t das duas expressões anteriores, explicitamos r em função de θ,

$$r = 3a\frac{\sec\theta\tan\theta}{1+\tan^3\theta}.$$

Sabendo que a área, delimitada pelo *loop*, é dada pela expressão

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} r^2\,\mathrm{d}\theta$$

devemos calcular a seguinte integral

$$A = \int_0^{\pi/2}\left(\frac{3a\sec\theta\tan\theta}{1+\tan^3\theta}\right)^2 \mathrm{d}\theta\cdot$$

Vamos introduzir a mudança de variável $\tan\theta = \xi$ de onde segue a integral

$$A = \frac{9a^2}{2}\int_0^{\infty}\frac{\xi^2}{(1+\xi^3)^3}\mathrm{d}\xi$$

que, após uma outra mudança de variável, $\xi^3 = \mu$, é conduzida na seguinte integral

$$A = \frac{3a^2}{2}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}\mu}{(1+\mu)^2}$$

com integração imediata, resultando para a área do laço, conforme Figura 10.1, $A = \dfrac{3a^2}{2}$ unidades de área.

Vamos, agora, determinar a equação da assíntota que, neste caso, é oblíqua e perpendicular à bissetriz dos quadrantes ímpares, logo tem o coeficiente angular igual a $m = -1$. Visto que a assíntota passa pelo ponto $(-a, 0)$ (por simetria, também passa pelo ponto $(0, -a)$) podemos escrever $y - 0 = -1(x+a)$ ou $y + a = -1(x-0)$ de onde segue para a equação da assíntota $y + x + a = 0$.

1. (MEC-INEP-Exame Nacional de Cursos/1998-Adaptado) Determine a área máxima que pode ter um retângulo inscrito em um semicírculo de raio unitário.

   $\star$ Utilize o teorema de Pitágoras para relacionar o raio do círculo e as coordenadas x e y que descrevem a circunferência a fim de mostrar que a área é igual a 1 unidade de área.

2. (MEC-INEP-Exame Nacional de Cursos/1998-Adaptado) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = \sqrt[5]{x}$. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $x = 1$.

   $\star$ Mostre que a tangente, nesse ponto, tem inclinação $1/5$. Utilize a equação da reta conhecido um ponto e a inclinação para obter $5y - x - 4 = 0$.

3. (MEC-INEP-Exame Nacional de Cursos/2001-Adaptado) Determine os valores de m para os quais a reta de equação $y = mx$ é tangente à parábola $y = x^2 + 1$.

   $\star$ Direto da definição de tangente para obter $m = \pm 2$.

4. (MEC-INEP-Exame Nacional de Cursos/2002-Adaptado) F é uma função real e derivável em todos os pontos de $\mathbb{R}$ e a função G é definida por $G(x) = F(1 - 2x)$. Expresse a derivada $G'(x)$, calculada para $x = 1$, em função da derivada de F.

   $\star$ Utilize a regra da cadeia para mostrar que $G'(1) = -2F'(-1)$.

5. Determine a relação entre o raio da base, denotado por r, e a altura de uma lata cilíndrica, denotada por h, a fim de obter, na sua confecção, o máximo de economia do material.

   $\star$ Expresse a área total da lata em função do volume e do raio da base, derive em relação ao raio, iguale a zero (obter um extremo) e substitua na expressão do volume para mostrar que $2r = h$.

6. Seja $x \in \mathbb{R}$. Considere a função $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2$. Determine, se existirem, os pontos de máximo, mínimo e inflexão.

   $\star$ Direto da definição. Ponto de mínimo $(1, 0)$, não tem ponto de máximo e ponto de inflexão $(2, 1/9)$.

7. Seja $x \in \mathbb{R}$. Determine os pontos extremantes (máximo e/ou mínimo) e pontos de inflexão, se existirem, para a função $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 13x + 10$.

   $\star$ Direto da definição. Não temos pontos extremantes e $(2, 0)$ é ponto de inflexão.

8. Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $a > 0$. Considere a função $y(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$. Determine a equação da reta tangente à curva no ponto de abscissa $x = 0$.

   $\star$ Mostre que a inclinação é igual a $1/a$. Utilize a equação da reta conhecido um ponto e a inclinação para obter $ay - x - \ln a = 0$.

9. Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $y = y(x)$. Calcule $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ para $3y^5 + 10y^3 + 15y = 15x$.

   $\star$ Utilize derivação implícita para mostrar que $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = (y^2 + 1)^{-2}$.

10. Uma corrente elétrica atravessa uma bobina de raio r e exerce uma força f sobre um pequeno imã cujo eixo está numa reta passando pelo centro da bobina e perpendicular ao seu plano. Sabendo que a força é dada por
$$f = \frac{x}{\sqrt{(r^2+x^2)^5}}$$
onde x é a distância entre o centro da bobina e o imã, determine para que valor de x a força é máxima.

$\star$ Direto da definição de extremante a fim de mostrar que $x = r/2$.

EXEMPLO 10.9. INTEGRAIS

Considere a curva $y = x^2$, uma parábola com simetria vertical. A curva mais simples e que não sabemos calcular a área delimitada por ela, o eixo horizontal e as paralelas ao eixo vertical cujas abscissas são $x = 0$ e $x = x$.

Vamos calcular essa área aproximando-a por retângulos, isto é, dividimos o intervalo fechado $[0,x]$ em n subintervalos de mesmo comprimento e aproximamos a área por meio de uma soma de áreas de retângulos. Esses retângulos têm bases iguais ao comprimento dos subintervalos cujas alturas são iguais ao valor da função ($y = x^2$) no ponto à esquerda do intervalo.

Consideremos o intervalo fechado $[0,x]$ com comprimento x e x/n o número de subintervalos, de modo que os pontos à esquerda dos subintervalos são tais que
$$0, \frac{x}{n}, \frac{2x}{n}, \frac{3x}{n}, \cdots, \frac{x}{n}(n-1)$$
de onde seguem as alturas (equação da parábola $y = x^2$, isto é, para cada valor do ponto à esquerda fornece a respectiva altura do retângulo)
$$0, \frac{x^2}{n^2}, \frac{4x^2}{n^2}, \frac{9x^2}{n^2}, \cdots, \frac{x^2}{n^2}(n-1)^2\cdot$$
Denotemos por S_n a soma das áreas (base vezes altura) dos n retângulos de igual altura, logo
$$S_n = \frac{x}{n}\cdot\frac{x^2}{n^2} + \frac{x}{n}\cdot\frac{4x^2}{n^2} + \frac{x}{n}\cdot\frac{9x^2}{n^2}, \cdots, \frac{x}{n}\cdot\frac{x^2}{n^2}(n-1)^2,$$
que pode ser escrita (fatorando o termo x^3/n^3) na forma
$$S_n = \frac{x^3}{n^3}[1+4+9+\cdots+(n-1)^2]\cdot$$
A soma que está entre colchetes, denotada por T_n, foi obtida no Ex.(53) do Capítulo 1 e resulta em $T_n = n(n-1)(2n-1)/6$, de onde segue para a soma dos n retângulos
$$S_n = \frac{x^3}{n^3}\frac{n(n-1)(2n-1)}{6},$$
que pode, ainda, ser escrita na seguinte forma
$$\begin{aligned} S_n &= \frac{x^3}{6}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{2n-1}{n} \\ &= \frac{x^3}{6}\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2-\frac{1}{n}\right)\cdot \end{aligned}$$

Tomando o limite $n \to \infty$, isto é, a largura do retângulo tão pequena quanto se queira (tendendo a zero), temos

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{x^3}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 - \frac{1}{n}\right) \right]$$

de onde segue

$$S = \frac{x^3}{6} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{x^3}{3} \cdot$$

Esse é o valor da área (em unidades de área) delimitada pela curva $y = x^2$ (parábola com simetria vertical), o eixo horizontal e as ordenadas relativas às abscissas $x = 0$ e $x = x$.

Digamos, por exemplo, $x = 3$ fornece a área $S = 9$ unidades de área. Note que essa é uma curva aberta, contrariamente à curva de equação $x^2 + y^2 = 1$ (circunferência centrada na origem e raio unitário) que delimita o círculo cuja área é π unidades de área. Nessa curva, fechada, intervém o número transcendente π, enquanto na curva aberta a área não é dada em termos desse número!

EXERCÍCIOS 10.9. INTEGRAIS

1. (MEC-INEP-Exame Nacional de Cursos/1998-Adaptado) Considere a função dada pela integral $F(x) = \int_0^x e^{-t} \mathrm{d}t$. Calcule a derivada em relação à variável x.

   $\star$ Obtenha o resultado $F'(x) = e^{-x}$ de duas maneiras. Primeiramente, integrando, substituindo os extremos e derivando. Utilizando o teorema fundamental do cálculo.

2. (MEC-INEP-Exame Nacional de Cursos/2001-Adaptado) Calcule a integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

   $\star$ Introduza a mudança $x = \tan\theta$ de modo a mostrar que a integral é igual a $\pi/2$.

3. Mostre o seguinte resultado

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{(x-2)^2 - 4}} \mathrm{d}x = \sqrt{x^2 - 4x} + \operatorname{arccosh}\left(\frac{x-2}{2}\right) + C$$

   onde C é uma constante arbitrária.

   $\star$ Introduza a mudança de variável $x - 2 = u$ e depois $u = 2\cosh\theta$.

4. Determinar o comprimento de arco $y = x$ de $x = 1$ até $x = 12$.

   $\star$ Apenas para se certificar do resultado (essa é uma reta que passa pela origem) calcule o comprimento utilizando a expressão que fornece o comprimento de arco a fim de obter 12 unidades de comprimento.

5. Seja $k \in \mathbb{R}$. Obtenha k na equação

$$\int_0^x f(\xi)\, \mathrm{d}\xi = k + \cos x \cdot$$

   $\star$ Utilize o teorema fundamental do cálculo para obter $k = -1$.

6. Calcular $\mathrm{d}y_i/\mathrm{d}x$, com $i = 1,2$, para

$$\text{a)}\quad y_1 = \int_0^x (t+t^2)\,\mathrm{d}t \qquad \text{e} \qquad \text{b)}\quad y_2 = \int_0^{2x} (t+t^2)\,\mathrm{d}t\cdot$$

   ⋆ a) Utilize o teorema fundamental do cálculo para obter $y_1' = x + x^2$. b) Utilize o teorema fundamental do cálculo e a regra da cadeia para obter $y_2' = 4x + 8x^2\cdot$

7. Utilizando o resultado do exercício anterior, calcule y' para

$$y = \int_x^{2x} (t+t^2)\,\mathrm{d}t\cdot$$

   ⋆ Com os dados do anterior e usando a linearidade da integral, mostre que $y' = 3x + 7x^2\cdot$

8. Determine $k \in \mathbb{R}$ em

$$\text{a)}\quad \int_0^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \operatorname{sen} x^2 + k \qquad \text{e} \qquad \text{b)}\quad \int_e^x f(\xi)\mathrm{d}\xi = \ln x + k\cdot$$

   ⋆ a) Utilize o teorema fundamental do cálculo para obter $k = 0$ e b) Utilize o teorema fundamental do cálculo para obter $k = -1$.

9. Calcule a área delimitada pela senóide de $x = 0$ até $x = 2\pi$.

   ⋆ Faça uso de simetria, pois a curva tem uma parte que se encontra abaixo do eixo horizontal, ou separe a integral em duas outras a fim de mostrar que a área é igual a 4 unidades de área.

10. Considere a parábola de equação $y = x^2/2$. a) Calcule a área delimitada por ela, o eixo horizontal e as ordenadas associadas às abscissas $x = 0$ e $x = 1$. b) Calcule o comprimento desse arco de parábola.

    ⋆ a) Integre para obter $A = 1/6$ unidades de área. b) Utilize a expressão que fornece o comprimento de uma curva a fim de mostrar que $s = (\sqrt{2} + \operatorname{arcsenh} 1)/2$ unidades de comprimento.

★ Epítome

Não nos parece comum um livro texto apresentar uma conclusão se é que esta é a palavra mais adequada. Diferentemente nós, aqui, vamos discorrer, em tom despretencioso e visando uma possível maneira de relacionar o conteúdo dos capítulos anteriores, sobre um fato histórico em que tomaram parte três grandes matemáticos, Bernoulli, Leibniz e Euler.

A fim de contextualizar a questão a ser discutida, começamos considerando a função (Capítulo 6) logaritmo (Capítulo 2) cuja base é 'e', isto é, o logaritmo neperiano $y = \ln ax$ sendo a um número real distinto de zero. É sabido que no campo dos números reais $ax > 0$ e esse fato nos leva diretamente à igualdade envolvendo derivadas (Capítulo 8)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln ax = \frac{1}{ax}\cdot a = \frac{1}{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x \tag{10.6}$$

isto é, $\ln ax$ e $\ln x$, desde que definidos, apresentam a mesma derivada.

Passemos à questão. Da igualdade dada na Eq.(10.6) é possível escrever, no caso em que $a = -1$ que $\ln(-x) = \ln(x)$, visto terem a mesma derivada?

Essa era a tese que defendia Bernoulli e que foi rechaçada por Leibniz que afirmava que não podia haver logaritmo de um número negativo. Foi Euler que refutou os dois argumentos no sentido de que derivadas iguais não nos levam a concluir que as funções devam ser iguais, como mostra, inequivocamente a Eq.(10.6) e, ainda mais, podemos ter logaritmos de números negativos, bem como de números complexos (Capítulo 4). Apenas para mencionar, lembramos que esse tópico (logaritmo de números negativos e de números complexos) foge ao escopo do material apresentado no presente livro, pois é tratado quando do conceito de funções analíticas, parte da análise complexa [4].

Como já mencionado, despretenciosamente, vamos apresentar essa conclusão efetuando as passagens formalmente, utilizando a circunferência trigonométrica (Capítulo 3), isto é, circunferência centrada na origem e raio unitário, conforme Figura 10.2, a seguir.

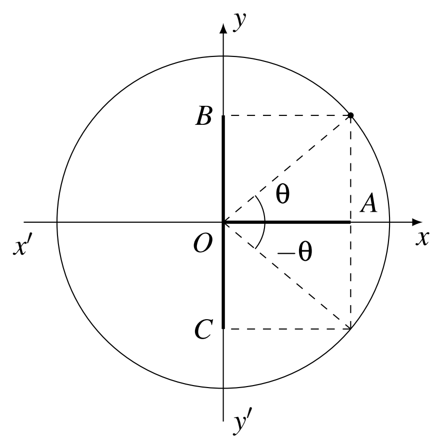


Figura 10.2: Circunferência trigonométrica.

Da Figura 10.2 podemos escrever $x = \cos\theta$ e $y = \operatorname{sen}\theta$ e (Pitagoras) a relação $x = \sqrt{1-y^2}$ (coordenadas cartesianas). Com o conceito de derivada (Capítulo 8) temos, já usando a relação pitagórica

$$\mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}y}{\cos\theta} = \frac{\mathrm{d}y}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Ainda, formalmente, substituímos $y = iz$ onde i é a unidade imaginária (Capítulo 4) de onde segue

$$\mathrm{d}\theta = \frac{i\,\mathrm{d}z}{\sqrt{1+z^2}}$$

cuja integração (Capítulo 9) fornece

$$\theta = i\int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1+z^2}}.$$

Note que, apesar de a integral ser indefinida, não nos preocupamos com a constante de integração o que será levado em conta apenas na expressão final. Essa integral pode ser efetuada com uma mudança de variável da forma $z = \tan t$, bem como utilizando a relação trigonométrica $\tan^2 t + 1 = \sec^2 t$, de onde podemos escrever

$$\theta = i\int \sec\alpha\,\mathrm{d}\alpha$$

que é uma integral conhecida (Exercício 9 do Capítulo 9), logo

$$\theta = i \ln(\sec\alpha + \tan\alpha) + C$$

onde C é uma constante arbitrária.

Voltando nas variáveis iniciais, isto é, primeiro em z e depois em y, podemos escrever

$$\theta = i \ln(\sqrt{1-y^2} - iy) + C.$$

Conforme Figura 10.2, temos que para $t = 0$ implica $y = 0$ de onde concluímos, a partir da expressão anterior, que $C = 0$, pois $\ln 1 = 0$, logo

$$\theta = i \ln(\sqrt{1-y^2} - iy)$$

ou ainda, multiplicando e dividindo o logaritmando pelo conjugado e já voltando na variável θ, podemos escrever

$$i\theta = \ln(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta). \tag{10.7}$$

A partir da periodicidade das funções seno e cosseno (Capítulo 6), isto é, das relações

$$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(\theta + 2k\pi) \qquad \text{e} \qquad \cos\theta = \cos(\theta + 2k\pi)$$

sendo $k \in \mathbb{Z}$, podemos escrever a Eq.(10.7) na forma

$$i(\theta + 2k\pi) = \ln(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta). \tag{10.8}$$

Da Eq.(10.8) concluímos que, para $\theta = 0$, temos, em geral

$$\ln 1 = i(2k\pi)$$

com $k \in \mathbb{Z}$ de onde, para $k = 0$ obtemos o resultado já conhecido $\ln 1 = 0$. Mencionamos que esse tipo de função, isto é, admitindo o mesmo valor para diferentes elementos do domínio, foge ao escopo do presente livro e são as chamadas funções plurívocas [4]. Por outro lado, considerando $\theta = \pi$ na Eq.(10.8), obtemos

$$\ln(-1) = i(\pi + 2k\pi)$$

com $k \in \mathbb{Z}$.

Ainda mais, exponenciando a Eq.(10.7) podemos escrever

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta. \tag{10.9}$$

Da Eq.(10.9) obtemos dois resultados que, até certo ponto, podem ser considerados intrigantes, a saber: para $\theta = \pi/2$ temos

$$e^{i\pi/2} = i \qquad \Longrightarrow \qquad i^i = e^{-\pi/2}$$

ou seja, a unidade imaginária elevada a ela mesma nos leva a um número real; bem como, para $\theta = \pi$, a célebre expressão devida a Euler

$$e^{i\pi} = -1 \qquad \Longrightarrow \qquad e^{i\pi} + 1 = 0$$

que coloca numa única relação a base dos logaritmos neperianos, a unidade imaginária e o quociente do comprimento de uma circunferência pelo dobro do raio.

Tomando $\theta \to n\theta$ com $n \in \mathbb{N}$ na Eq.(10.9) podemos escrever

$$e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n = (\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = \cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta) \tag{10.10}$$

conhecida pelo nome de fórmula de de Moivre.

Enfim, vamos concluir com uma parte do conteúdo do Capítulo 1, o número de ouro [15]. Considere $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ com $b > a$. Seja o segmento de reta de comprimento $a + b$. Vamos dividi-lo em média e extrema razão: o segmento $a + b$ (todo) está para o segmento b (maior) assim como o segmento b está para o segmento a (menor), isto é

$$\frac{a+b}{b} = \frac{b}{a} \qquad \Longrightarrow \qquad b^2 - ab - a^2 = 0$$

que, resolvida para b fornece

$$b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}a$$

visto que a outra raiz não é um número positivo. O número $(1+\sqrt{5})/2$, denotado por ϕ é conhecido com o nome de número de ouro e o quociente b/a divisão áurea. Esse número goza de várias propriedades que, aqui, mencionamos apenas quatro delas

(i) $\phi^2 = \phi + 1$. O quadrado de ϕ é igual ao próprio ϕ acrescido da unidade.

(ii) $\frac{1}{\phi} = \phi - 1$. O inverso de ϕ é igual ao próprio ϕ subtraido da unidade.

(iii) ϕ é solução de uma equação cúbica (Capítulo 5) $x^3 - 2x - 1 = 0$.

(iv) ϕ é o limite (Capítulo 7) de razões sucessivas de números de Fibonacci

$$\frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \ldots$$

Finalizamos, deixando para o leitor algumas questões que estão relacionadas com o conteúdo dos capítulos precedentes.

1. Considere $n = 3$ na Eq.(10.10) de modo a obter expressões para o seno e o cosseno do arco triplo. Analogamente para o arco dobro.

2. Considere $\theta = 2\pi/5$ radianos a fim de mostrar que valem as relações

$$\cos(2\pi/5) = \frac{1}{2\phi} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{sen}(2\pi/5) = \frac{\sqrt{\phi+2}}{2}$$

   sendo $\phi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ o chamado número de ouro (Capítulo 1).

3. Mostre que $\phi = 2\cos(\pi/5)$ é irracional.

Referências Bibliográficas

[1] A. F. A. Aguiar, A. F. S. Xavier e J. E. M. Rodrigues, *Cálculo para Ciências Médicas e Biológicas*, Editora Habra, São Paulo, (1988).

[2] T. Andreescu e D. Andrica, *Números Complexos de A a ... Z*, Vestseller, Fortaleza, (2013).

[3] L. Blank e A. Tarquin, *Engenharia Econômica*, Sexta Edição, McGraw Hill, São Paulo (2008).

[4] E. Capelas de Oliveira and W. A. Rodrigues Jr., *Funções Analíticas com Aplicações*, Editora Livraria da Física, São Paulo (2005).

[5] E. Capelas de Oliveira, *Métodos Analíticos de Integração*, Editora Livraria da Física, São Paulo, (2011).

[6] M. P. Carmo, A. C. Morgado e E. Wagner, *Trigonometria, Números Complexos*, Coleção do Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, (1992).

[7] E. Contharteze Grigoletto and E. Capelas de Oliveira, *Is a definition always useful to calculate something*?, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., **44**, 761-765, (2013).

[8] B. Demidovich, *Problemas e Exercícios de Análise Matemática*, Editora Mir, São Paulo, (1978).

[9] W. A. Granville, P. F. Smith e W. R. Longley, *Elementos de Cálculo Diferencial e Integral*, Editora Científica, Rio de Janeiro, (1961).

[10] E. L. Lima, P. C. P. Carvalho e A. C. Morgado, *A Matemática no Ensino Médio*, Volumes 1 (2012), 2 (2002), 3 (2001) e 4 (2010), Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro.

[11] E. L. Lima, *Curso de Análise*, Volume 1, Projeto Euclides, Impa, Rio de Janeiro, (1987).

[12] E. L. Lima, *Logaritmos*, Coleção do Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, (1991).

[13] B. H. Maia Teixeira e E. Capelas de Oliveira, *Cálculo*: Exercícios Resolvidos para os cursos de Exatas e Tecnológicas, Editora Unicamp, Campinas, (2014).

[14] E. Maor, *e*: *A história de um número*, (tradução Jorge Calife) Record, Rio de Janeiro, (2006).

[15] D. Perkins, ϕ, π, e & i, Mathematical Association of America, Washington, DC (2017).

[16] N. Piskunov, *Cálculo Diferencial e Integral*, Edições Cardoso, São Paulo, (1973).

[17] P. Ribenboim, *Funções, Limites e Continuidade*, Textos Universitários, SBM, Rio de Janeiro, (2012).

[18] H. J. Straight and R. Dowds, *An alternate method for finding the partial fraction decomposition of a rational function*, Amer. Math. Montly, **91**, 365-367 (1984).

[19] G. B. Thomas, *Cálculo*, Décima primeira edição, Pearson/Addison Wesley, São Paulo, (2008).